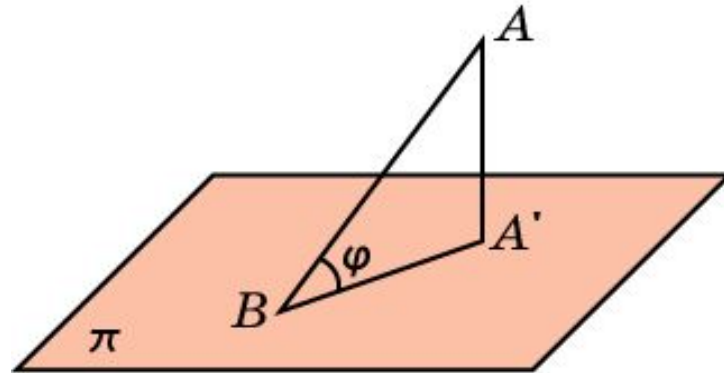


УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

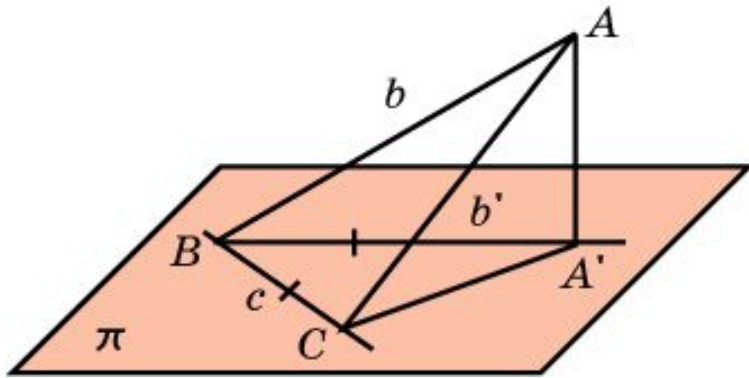
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.



Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Теорема

Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.



Доказательство. Пусть AB - наклонная к плоскости π , $A'B$ - ее ортогональная проекция, c - прямая в плоскости π , проходящая через точку B .

Докажем, что угол ABA' меньше угла ABC . Для этого на прямой c отложим отрезок BC , равный $A'B$. В треугольниках ABA' и ABC сторона AB общая, $A'B = BC$ и $AA' < AC$. Следовательно, угол ABA' меньше угла ABC .

Упражнение 1

Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы.
Будут ли эти прямые параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Две плоскости образуют с данной прямой равные углы.
Как расположены плоскости относительно друг друга?

Ответ: Параллельны или пересекаются.

Упражнение 3

Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

Ответ: 60° .

Упражнение 4

Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60° ? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

Ответ: Нет, 45° .

Упражнение 5

Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60° , а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

Ответ: 30° .

Упражнение 6

Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30° . Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ: 45° .

Упражнение 8

Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости π (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью π). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости π или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости π ?

Ответ: Угол наклона высоты.

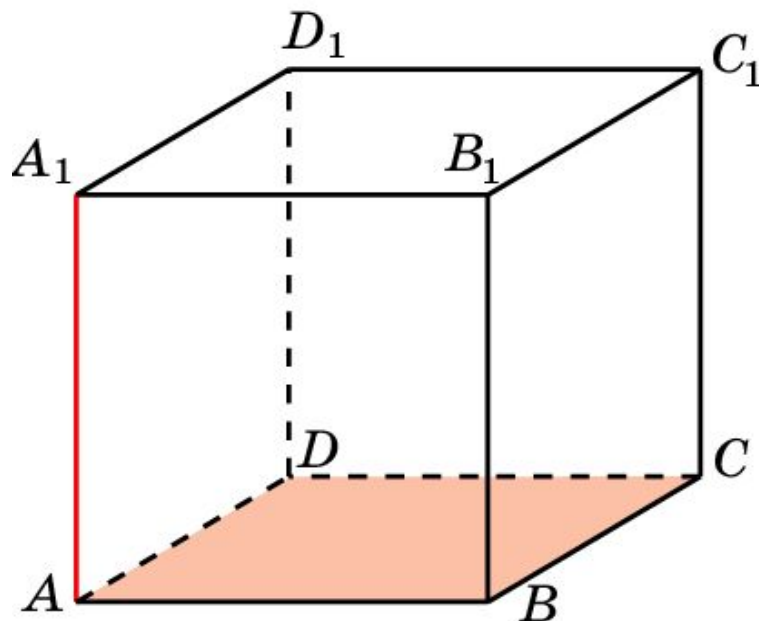
Упражнение 9

Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK , равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD . Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Ответ: 30° .

Куб 1

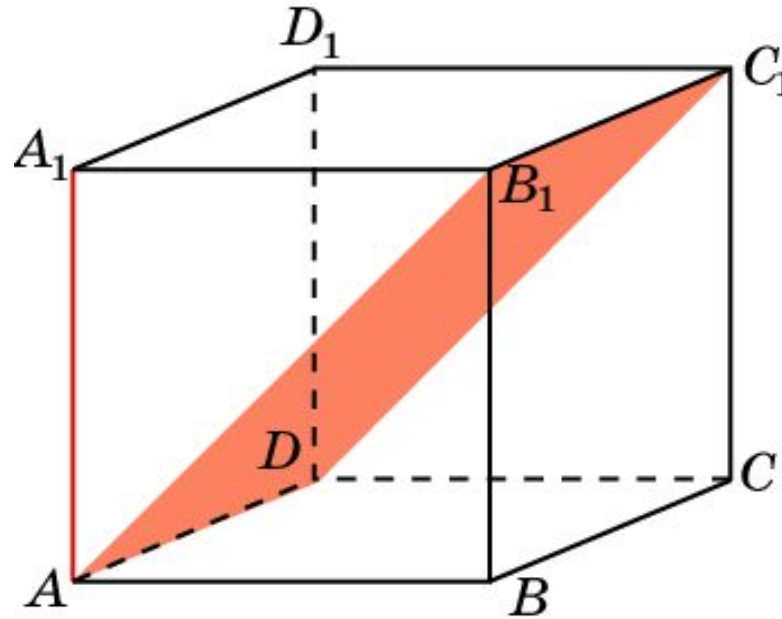
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC .



Ответ: 90° .

Куб 2

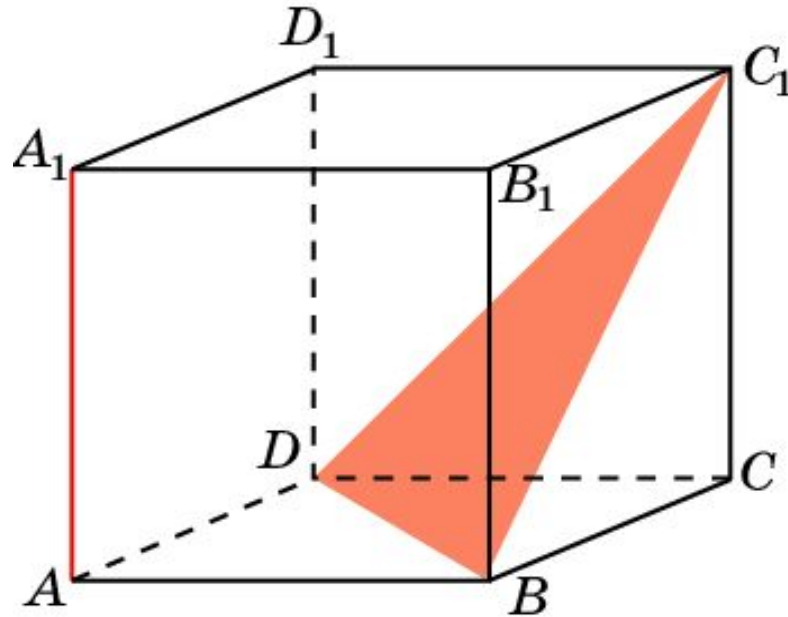
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 .



Ответ: 45° .

Куб 3

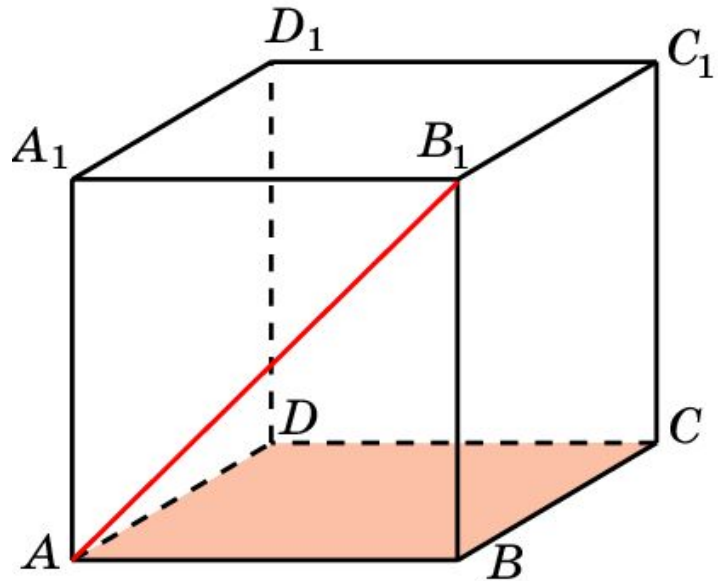
В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D .



Ответ: $tg \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 4

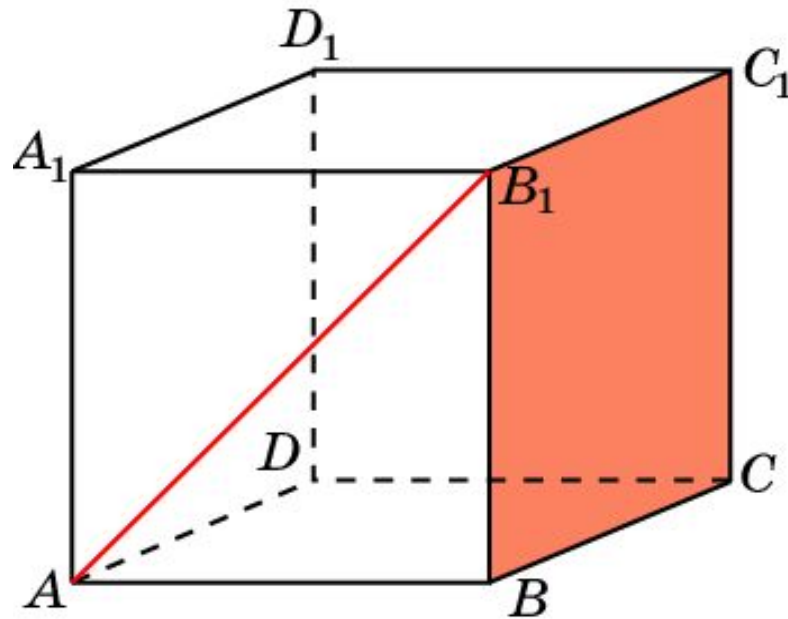
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC .



Ответ: 45° .

Куб 5

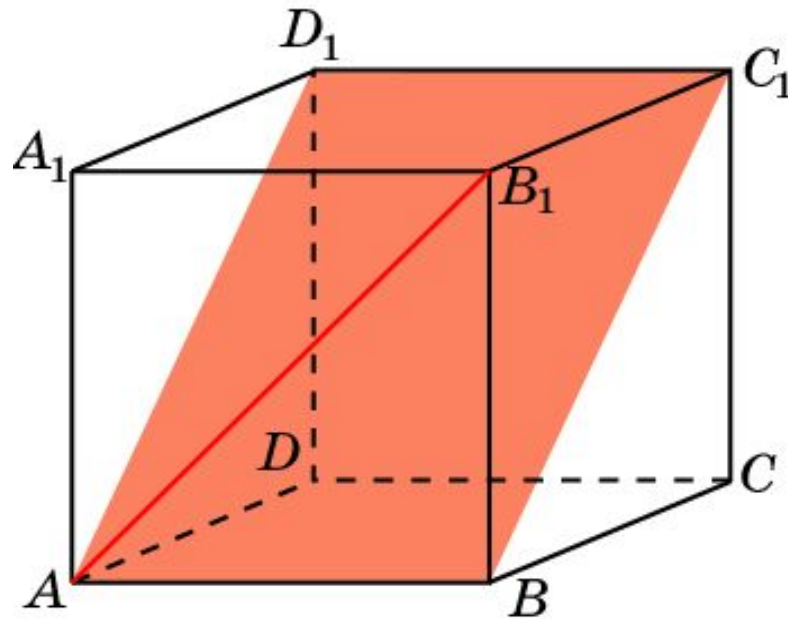
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1 .



Ответ: 45° .

Куб 6

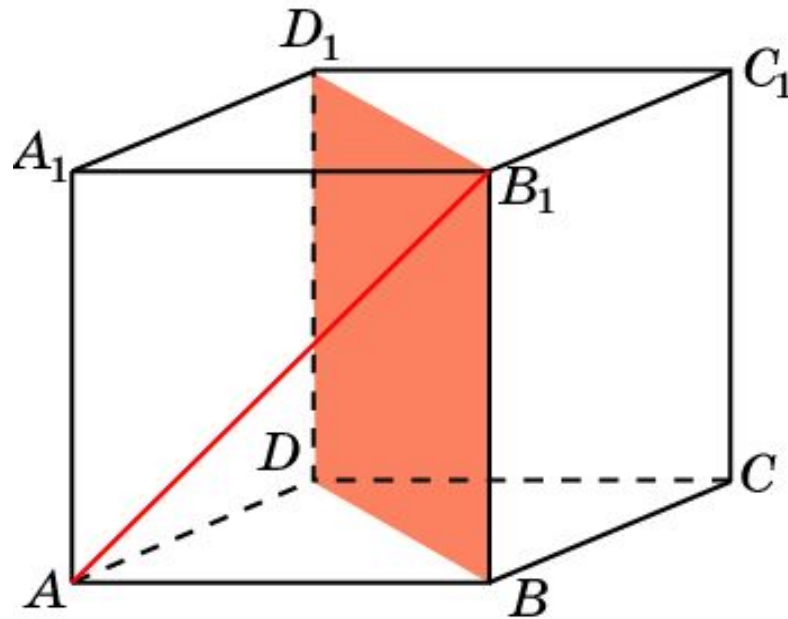
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .



Ответ: 30° .

Куб 7

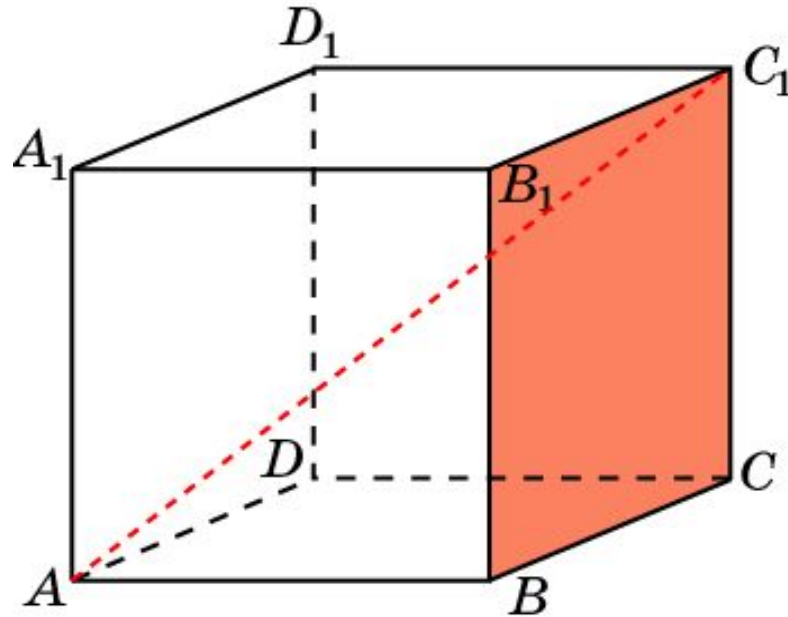
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1D_1 .



Ответ: 30° .

Куб 8

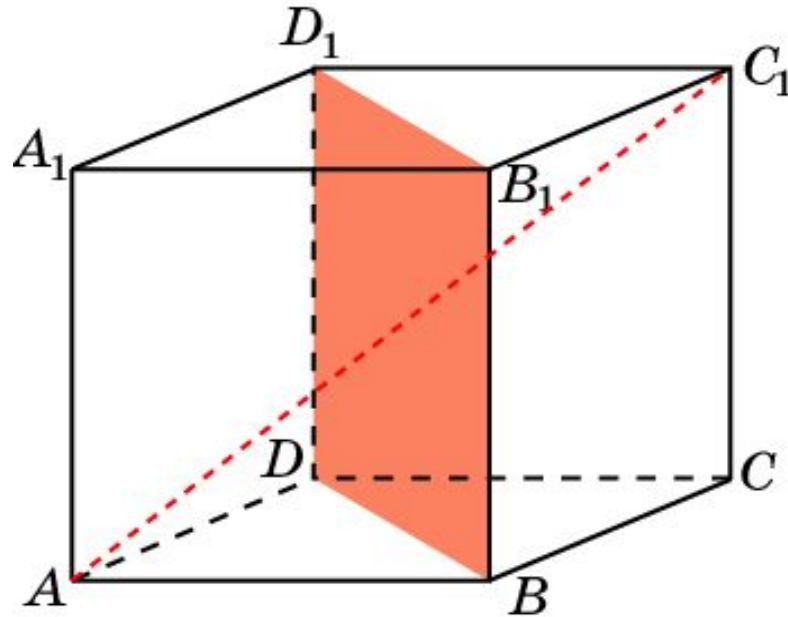
В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .



Ответ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 9

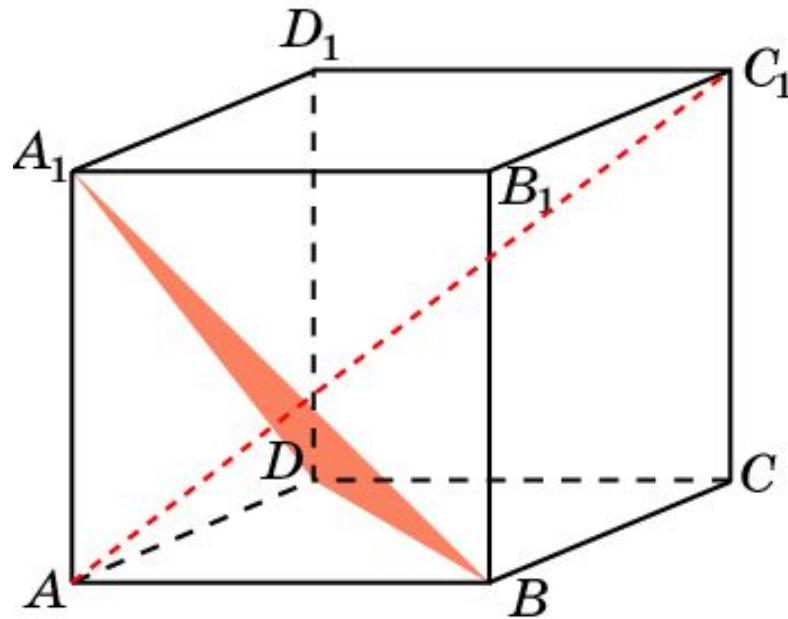
В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1 .



Ответ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Куб 10

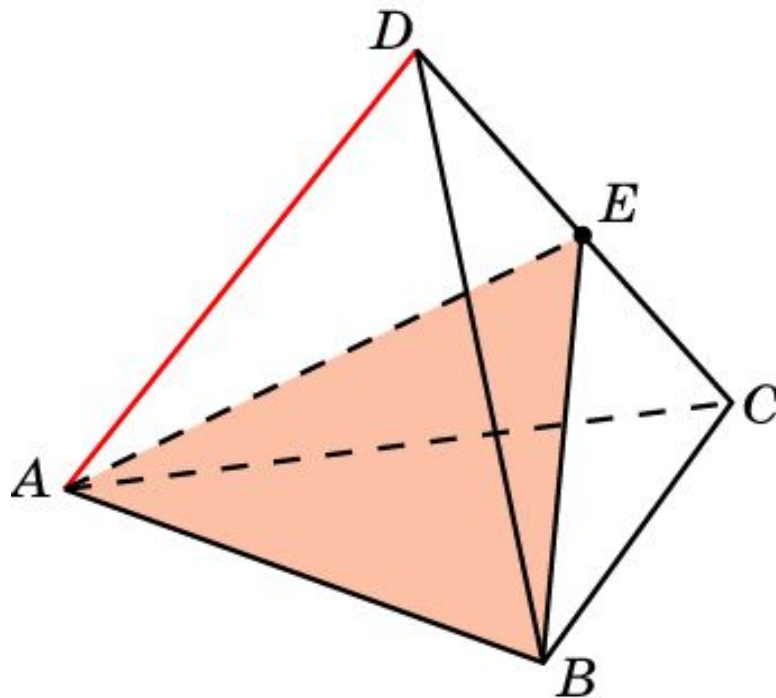
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BA_1D .



Ответ: 90° .

Пирамида 1

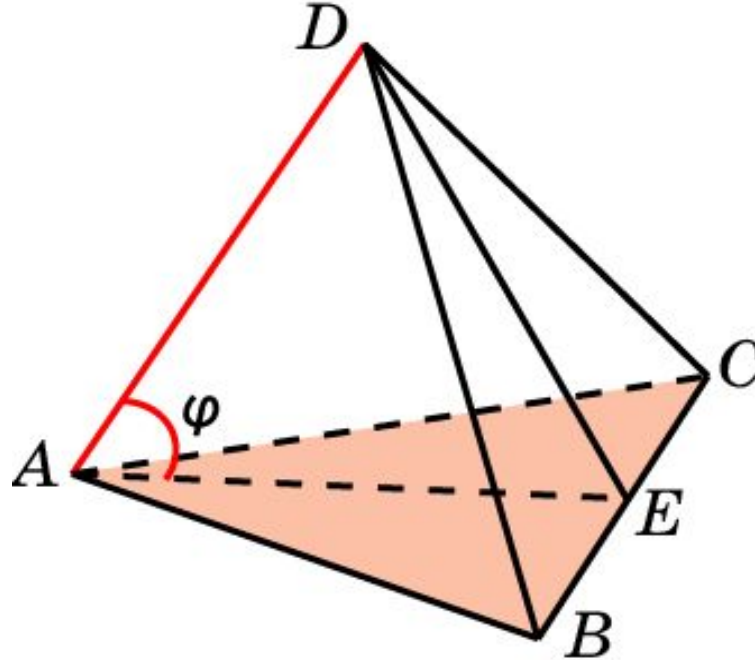
В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра CD . Найдите угол между прямой AD и плоскостью ABE .



Ответ: 30° .

Пирамида 2

В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите косинус угла между прямой AD и плоскостью ABC .

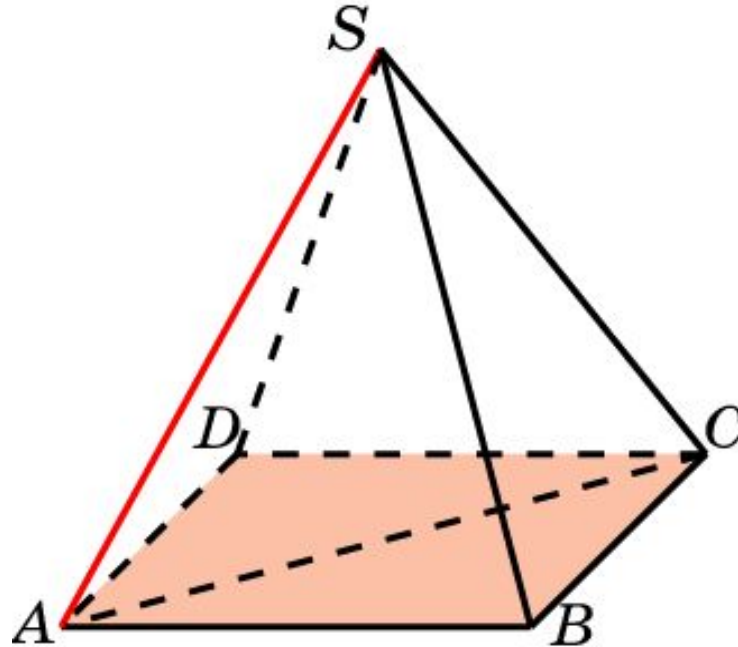


Решение. Пусть E – середина ребра BC . Искомый угол φ равен углу DAE . В треугольнике DAE имеем: $AD = 1$, $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Используя теорему косинусов, получим $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC .

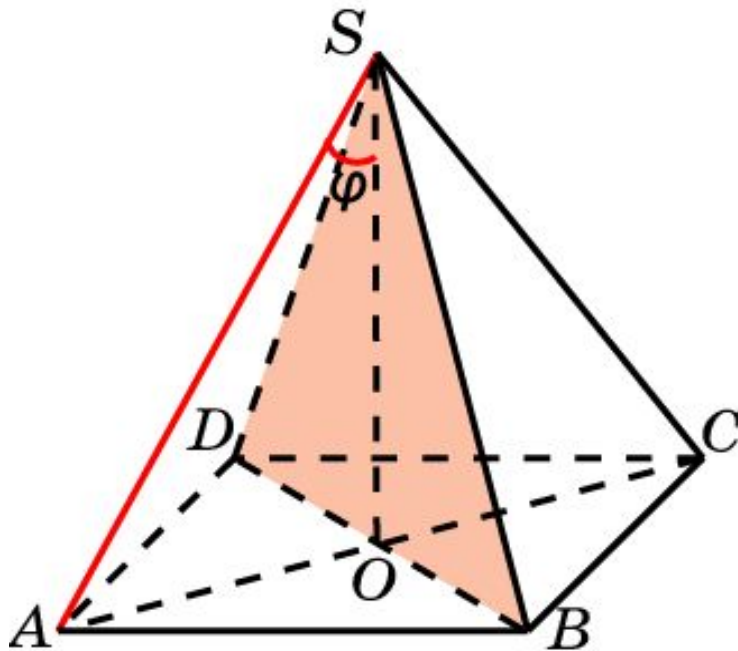


Решение: Искомый угол равен углу SAC . В треугольнике SAC имеем: $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 45° .

Ответ: 45° .

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью SBD .

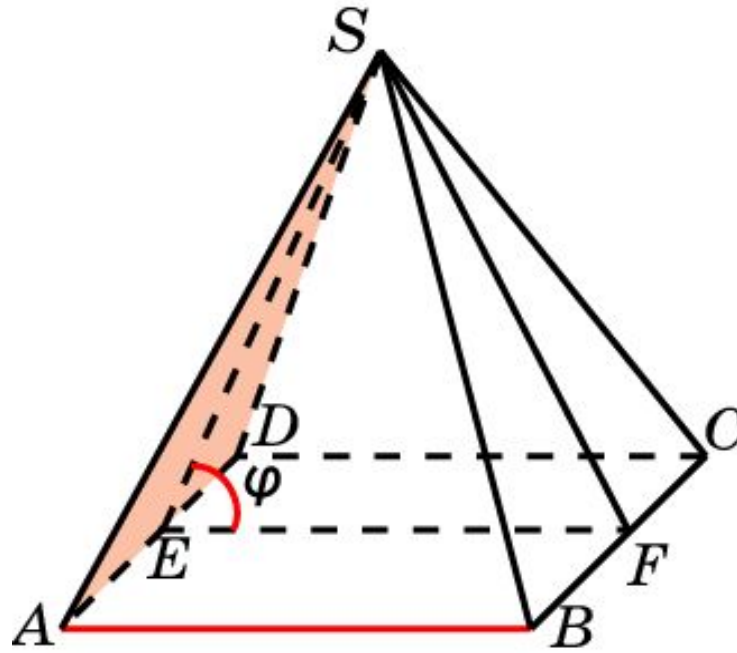


Решение: Искомый угол равен углу SOA , где O – середина BD . В прямоугольном треугольнике SOA имеем: $SA = 1$, $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, искомый угол φ равен 45° .

Ответ: 45° .

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD .

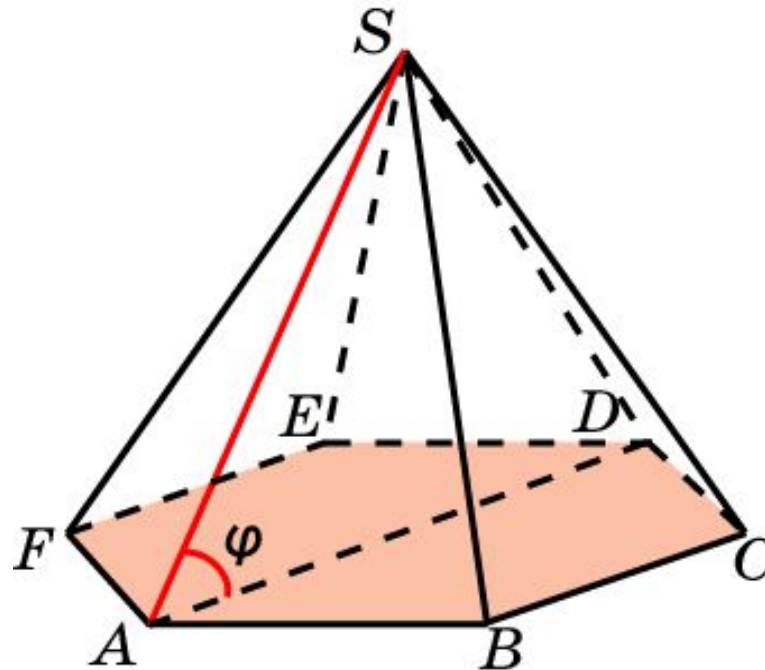


Решение. Пусть E, F – середины ребер AD и BC . Искомый угол φ равен углу SEF . В треугольнике SEF имеем: $EF = 1$, $SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Используя теорему косинусов, получим $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 6

В правильной 6-ой пирамиде $SA\dots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC .

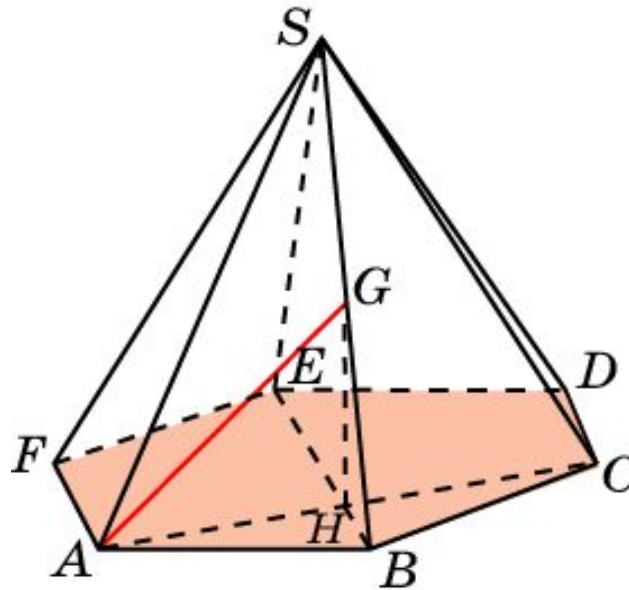


Решение. Искомый угол φ равен углу SAD . Треугольник SAD равносторонний. Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пирамида 7

В правильной 6-ой пирамиде $SA\dots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, точка G – середина ребра SB . Найдите угол между прямой AG и плоскостью ABC .

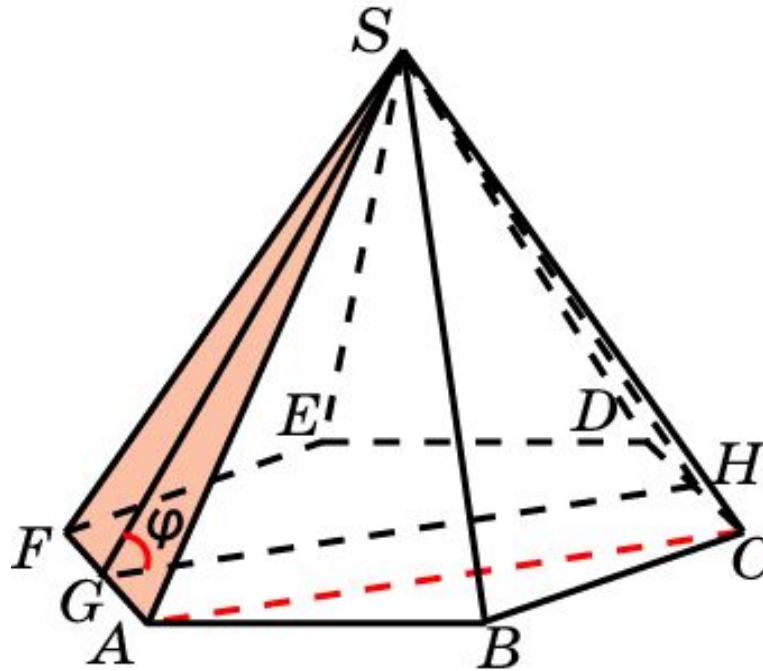


Решение. Искомый угол равен углу GAN . Треугольник GAN прямоугольный равнобедренный. Следовательно, угол равен 45° .

Ответ: 45° .

Пирамида 8

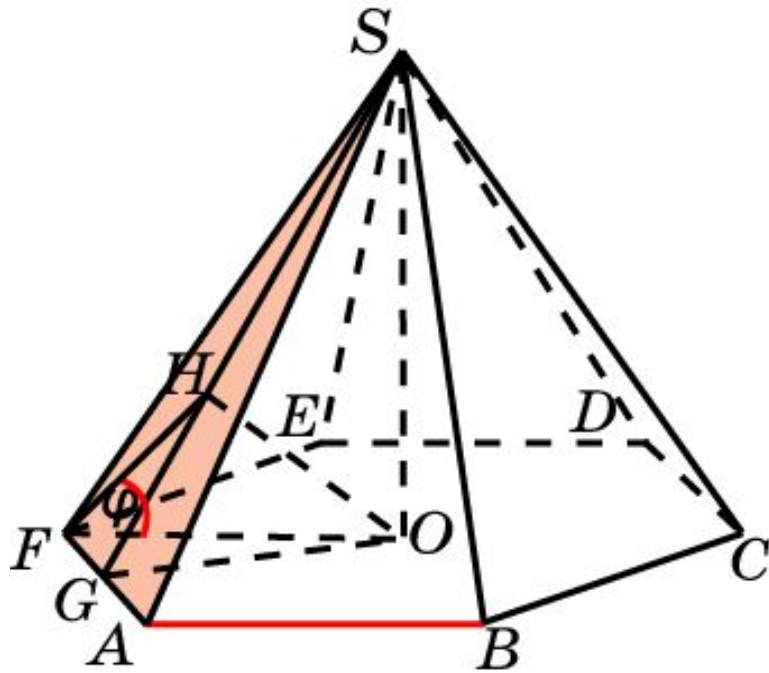
В правильной 6-ой пирамиде $SA\dots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF .



Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Пирамида 9*

В правильной 6-ой пирамиде $SA\dots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAF .



Решение. Пусть O – центр основания, G – середина AF . Искомый угол φ равен углу между прямой FO и плоскостью SAF . Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость SAF . Тогда φ равен углу OFH . В треугольнике SOG имеем:

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}, SO = \sqrt{3}, SG = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } OH = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

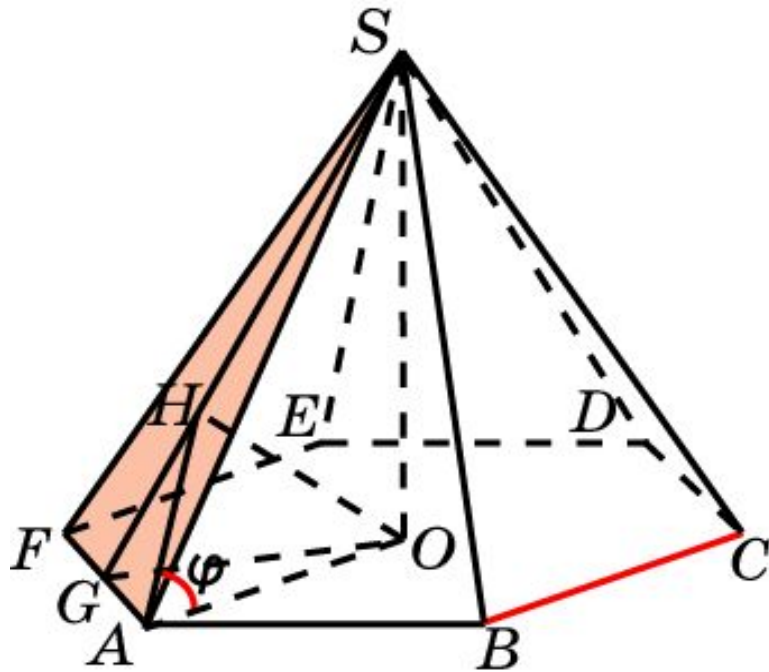
В треугольнике OFH $FH = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $OF = 1$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Пирамида 10*

В правильной 6-ой пирамиде $SA \dots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой BC и плоскостью SAF .



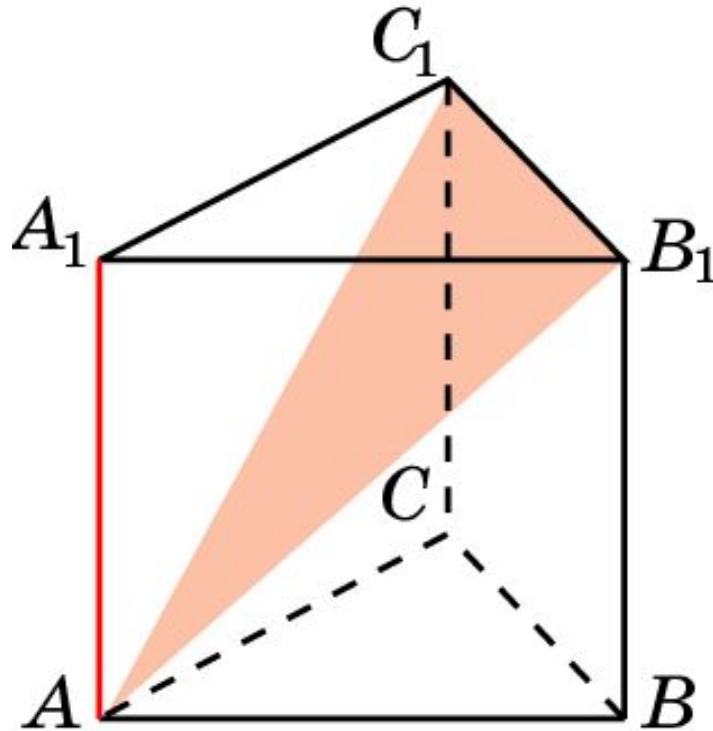
Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Решение. Пусть O – центр основания, G – середина AF . Искомый угол φ равен углу между прямой AO и плоскостью SAF . Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость SAF . Тогда φ равен углу OAH . Из решения предыдущей задачи имеем:

$$OH = \frac{\sqrt{15}}{5}. \text{ В треугольнике } OAH \\ OF = 1, AH = \frac{\sqrt{10}}{5}. \text{ Следовательно,} \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Призма 1

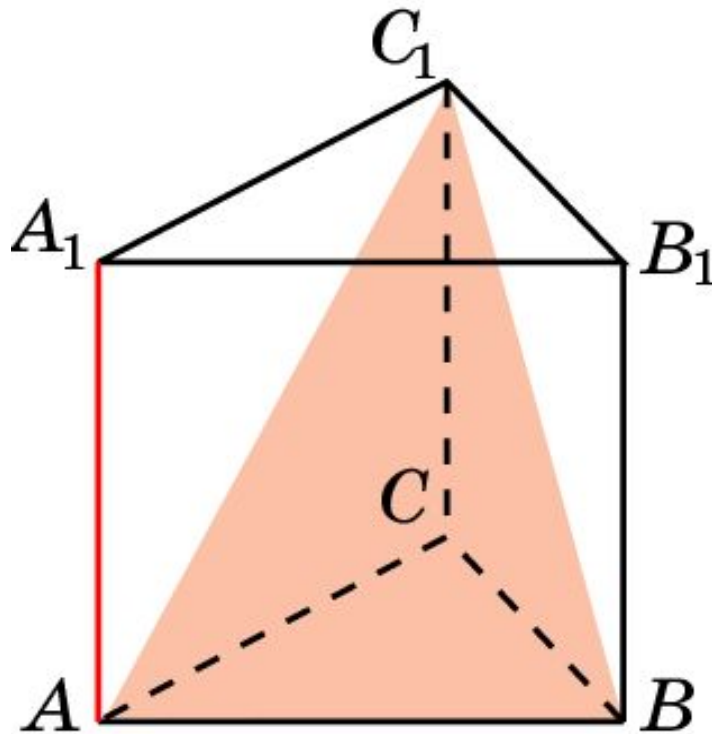
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 .



Ответ: $tg \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 2

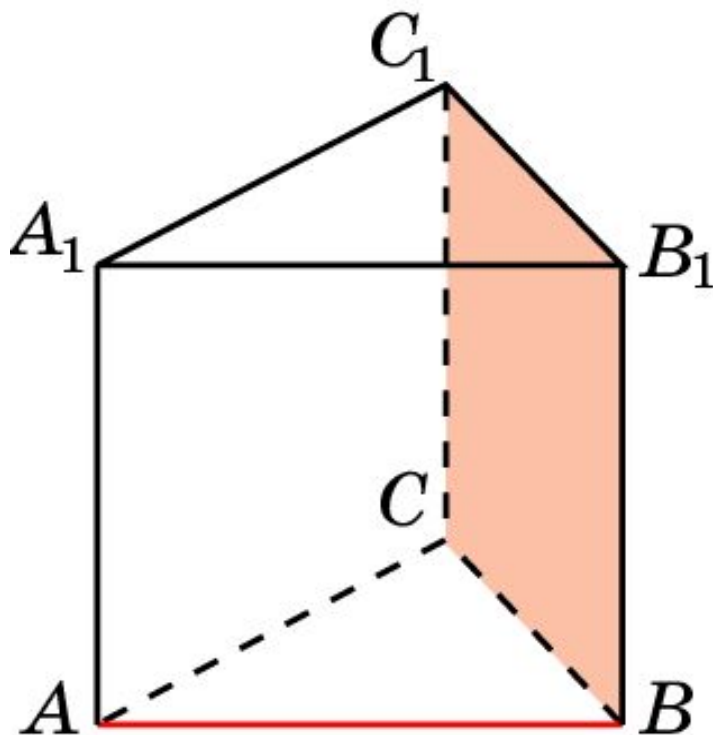
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1 .



Ответ: $tg \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 3

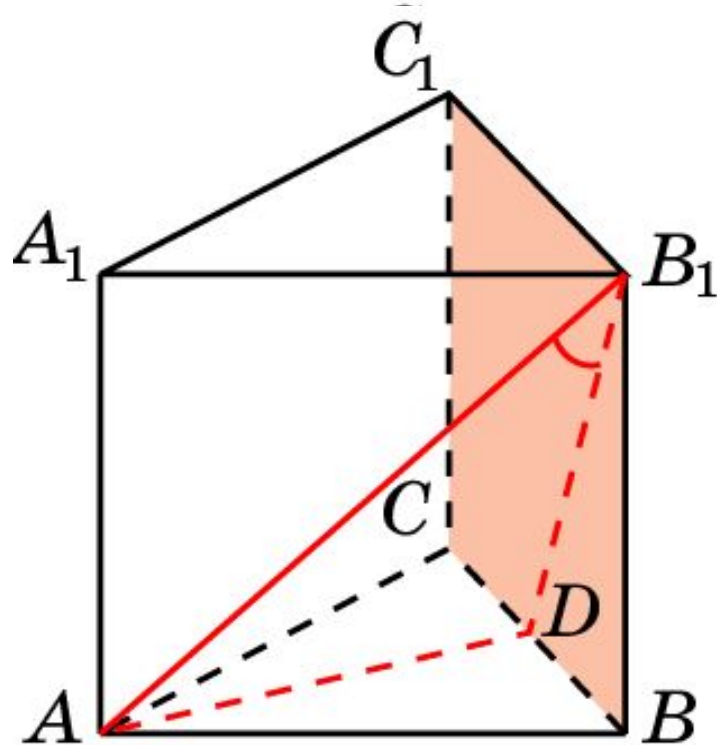
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BB_1C_1 .



Ответ: 60° .

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1 .

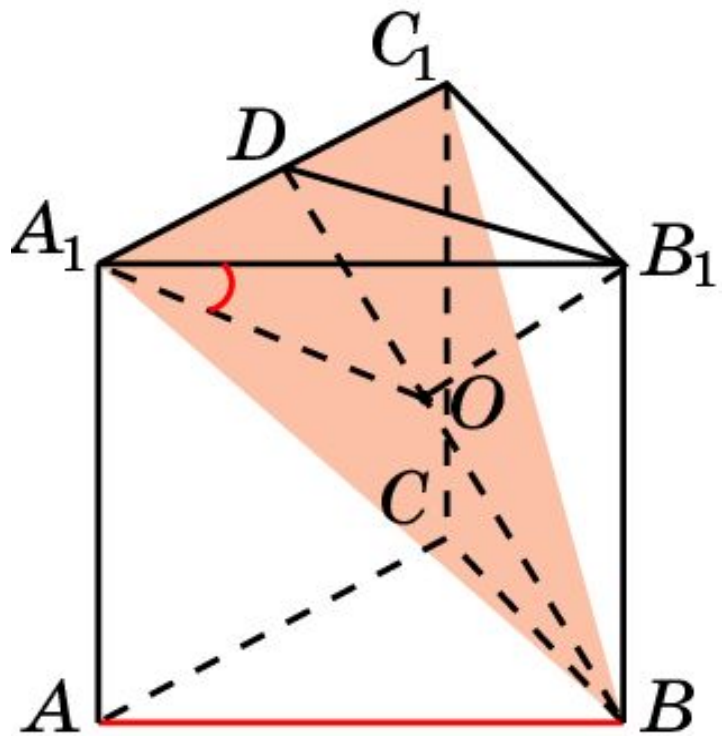


Решение: Искомый угол равен углу B_1AD , где D – середина ребра BC . Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Призма 5*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB и плоскостью A_1BC_1 .



Решение: Искомый угол равен углу B_1A_1O , где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на плоскость A_1BC_1 . Из прямоугольного треугольника BB_1D находим

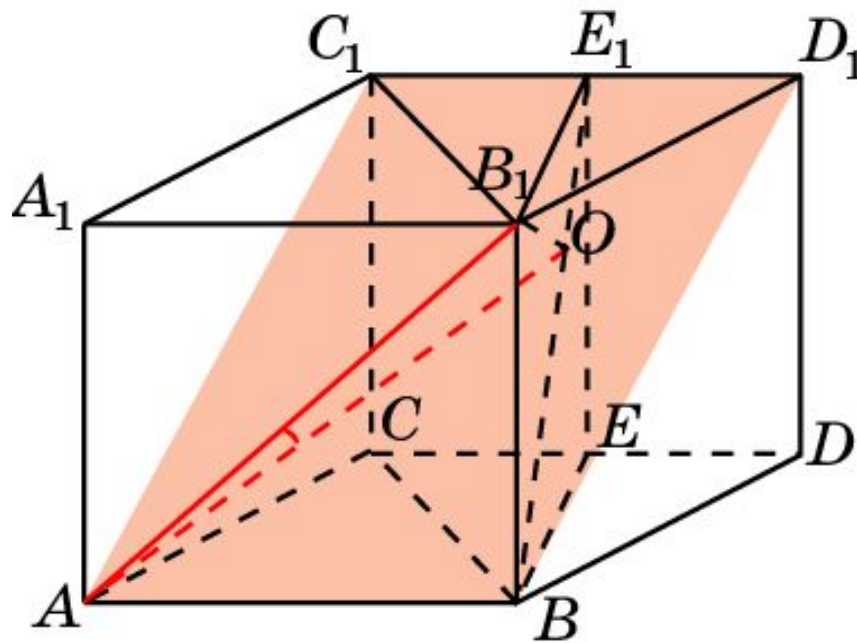
$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Призма 6*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .



Решение: Достроим треугольную призму до четырехугольной.

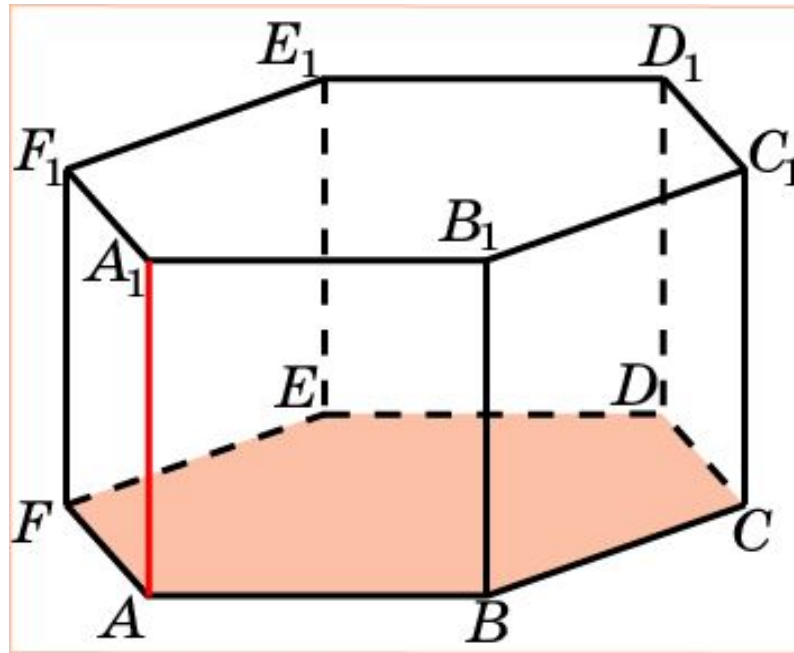
BEE_1B_1 – сечение, перпендикулярное CD . B_1O перпендикулярен BE_1 . Искомый угол равен углу B_1AO . Из прямоугольного треугольника BB_1E_1 находим

$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}.$

Призма 7

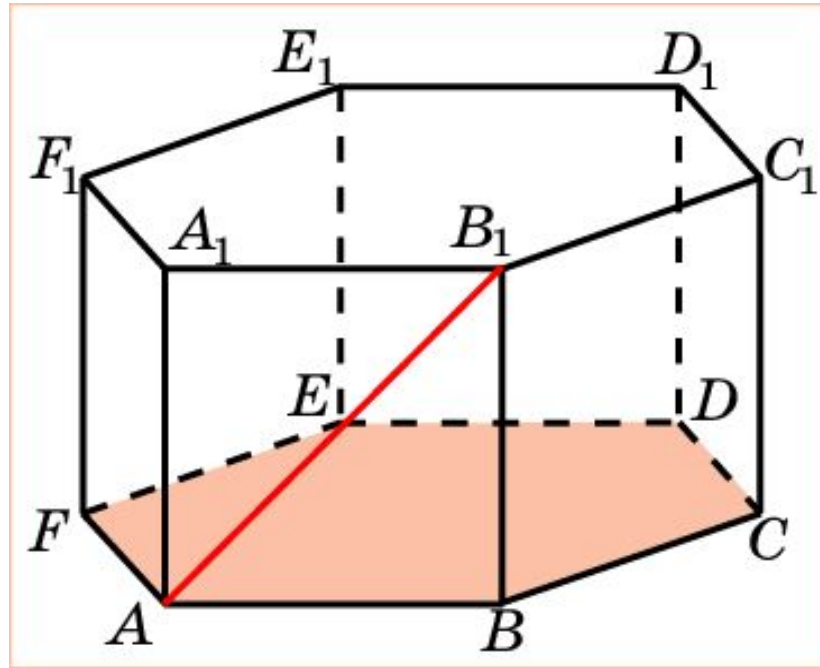
В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC .



Ответ: 90° .

Призма 8

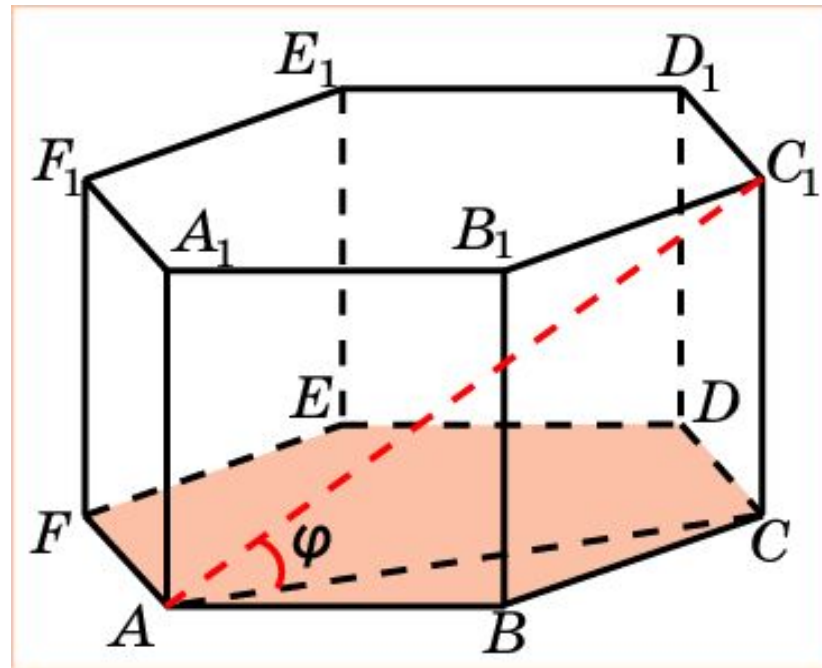
В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC .



Ответ: 45° .

Призма 9

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC .



Решение: Искомый угол φ равен углу C_1AC .

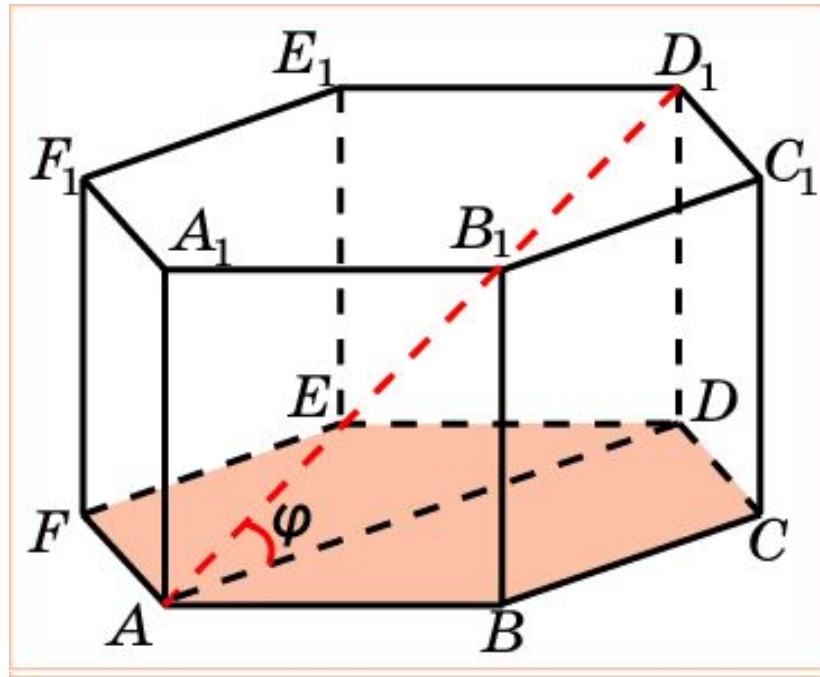
В прямоугольном треугольнике ACC_1 $CC_1 = 1$, $AC_1 = 2$.

Следовательно, $\varphi = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

Призма 10

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AD_1 и плоскостью ABC .



Решение: Искомый угол φ равен углу D_1AD .

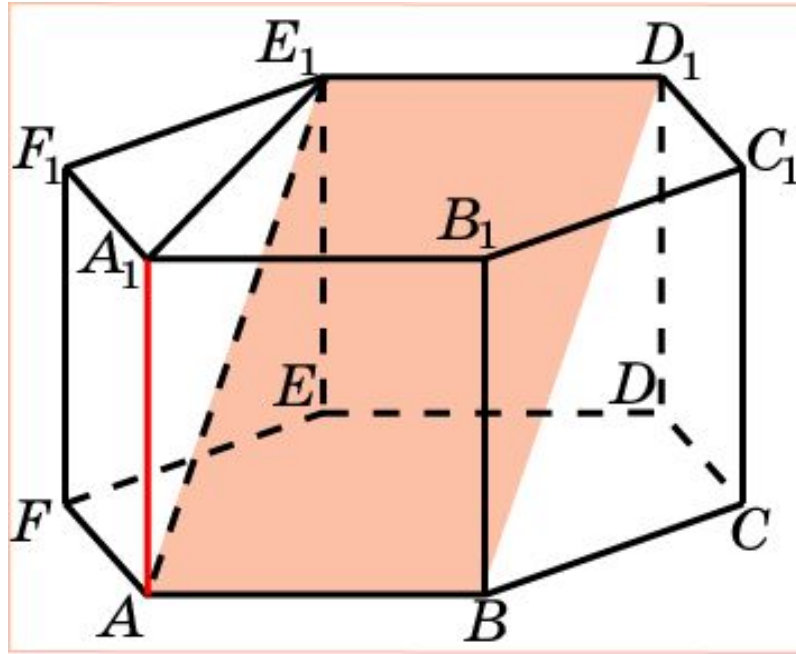
В прямоугольном треугольнике ADD_1 имеем: $DD_1 = 1$, $AD = 2$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$.

Призма 11

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABD_1 .

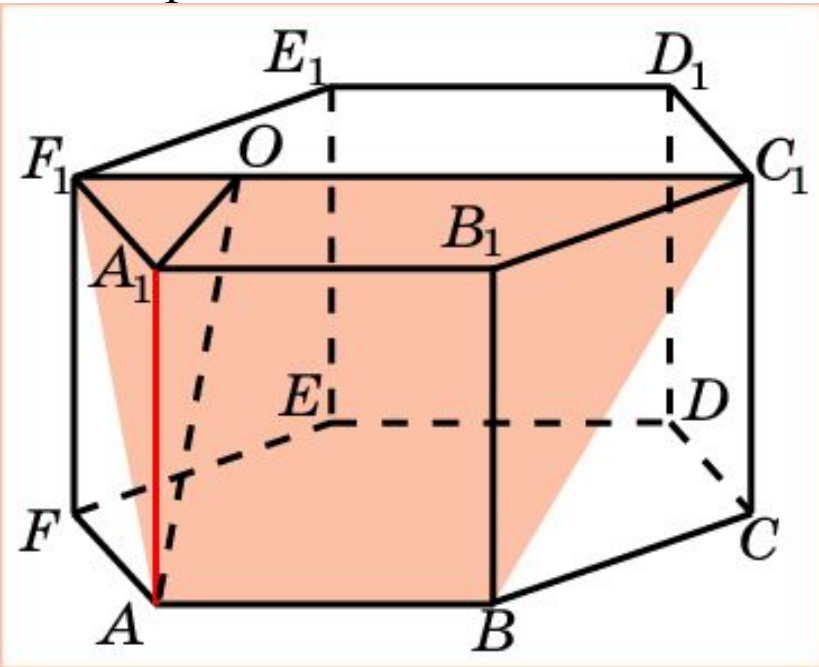


Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AE_1 . В прямоугольном треугольнике A_1AE_1 имеем: $AA_1 = 1$; $A_1E_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Призма 12

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1 .



Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AO , где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую C_1F_1 .

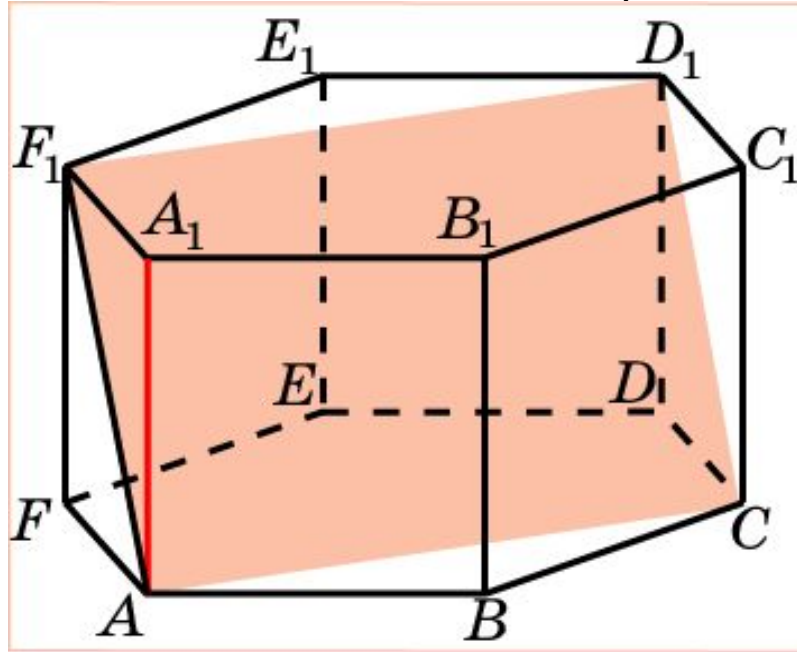
В прямоугольном треугольнике A_1AO имеем: $AA_1 = 1$; $A_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 13

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ACD_1 .

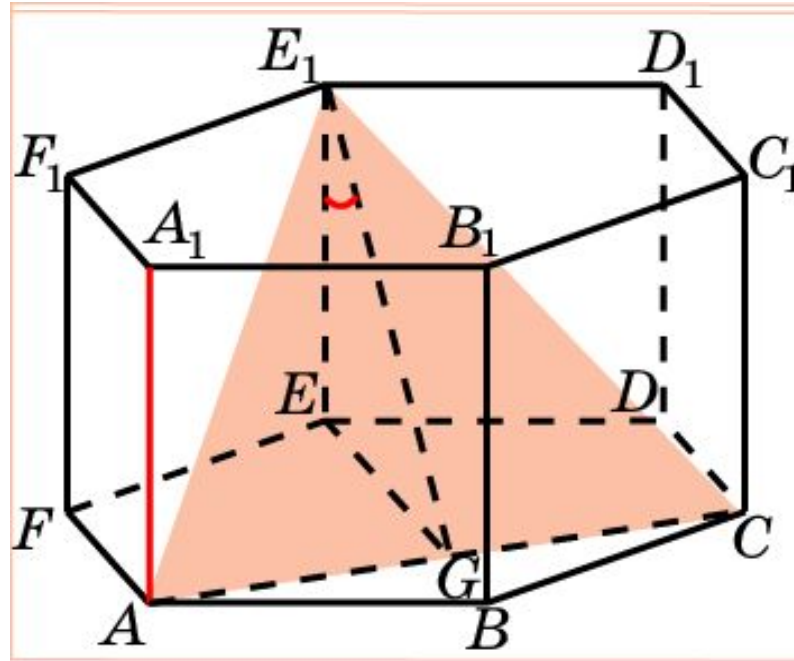


Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AF_1 . В прямоугольном треугольнике A_1AF_1 имеем: $AA_1 = 1$; $A_1F_1 = 1$. Следовательно, $\varphi = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Призма 14

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс между прямой AA_1 и плоскостью ACE_1 .



Решение: Из точки E_1 опустим перпендикуляр E_1G на прямую AC . Искомый угол φ равен углу EE_1G .

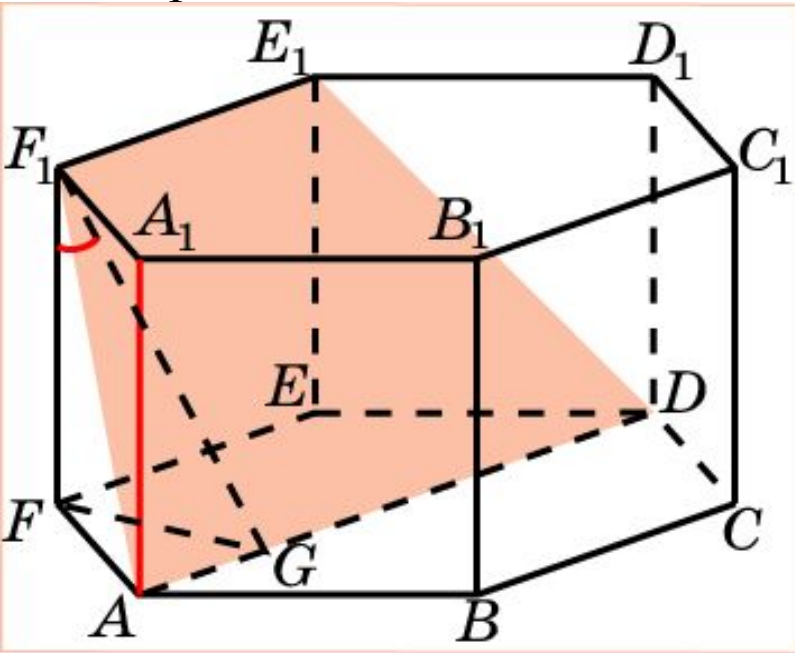
В прямоугольном треугольнике EE_1G имеем: $EE_1 = 1$; $EG = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}$.

Призма 15

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ADE_1 .



Решение: Из точки F_1 опустим перпендикуляр F_1G на прямую AD . Искомый угол φ равен углу FF_1G .

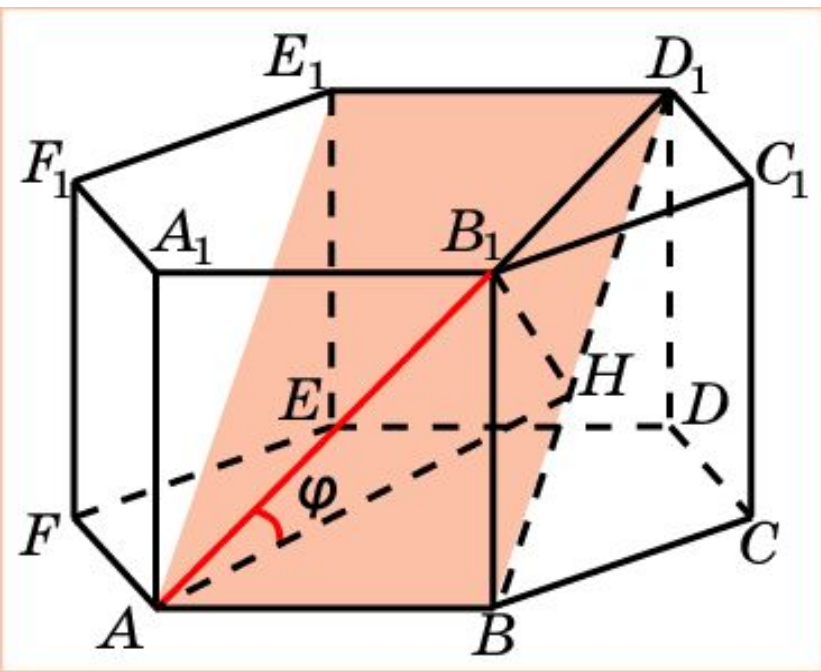
В прямоугольном треугольнике FF_1G имеем: $FF_1 = 1$; $FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 16*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1 .



Решение: Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BD_1 . Искомый угол φ равен углу B_1AH . В прямоугольном треугольнике BB_1D_1 имеем: $BB_1 = 1$; $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $BD_1 = 2$. Следовательно, угол BD_1B_1 равен 30° и, значит, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

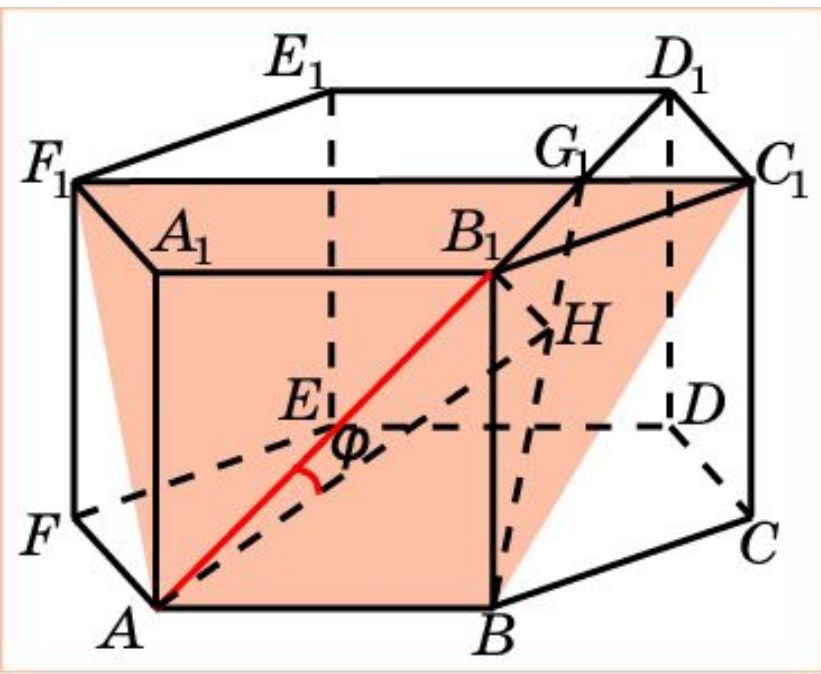
В прямоугольном ²треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Призма 17*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .



Решение: Проведем прямые C_1F_1 , B_1D_1 и обозначим G_1 их точку пересечения. Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BG_1 . Искомый угол φ равен углу B_1AH . В прямоугольном треугольнике BB_1G_1 имеем:

$$BB_1 = 1; B_1G_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, BG_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

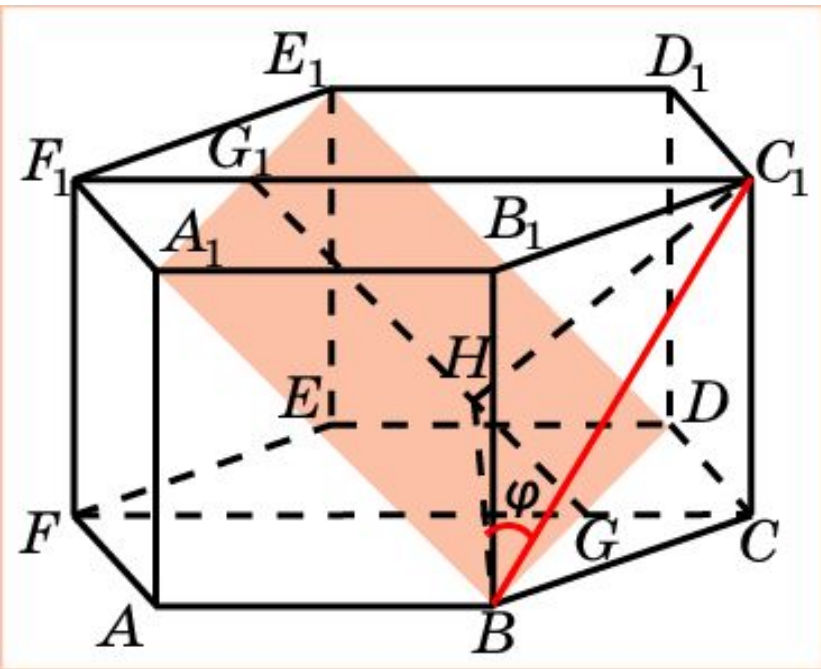
Из подобных треугольников BB_1G_1 и B_1HG_1 находим $B_1H = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем $B_1H = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $AB_1 = \sqrt{2}$.

Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}$. **Ответ:** $\sin \varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

Призма 18*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1 .



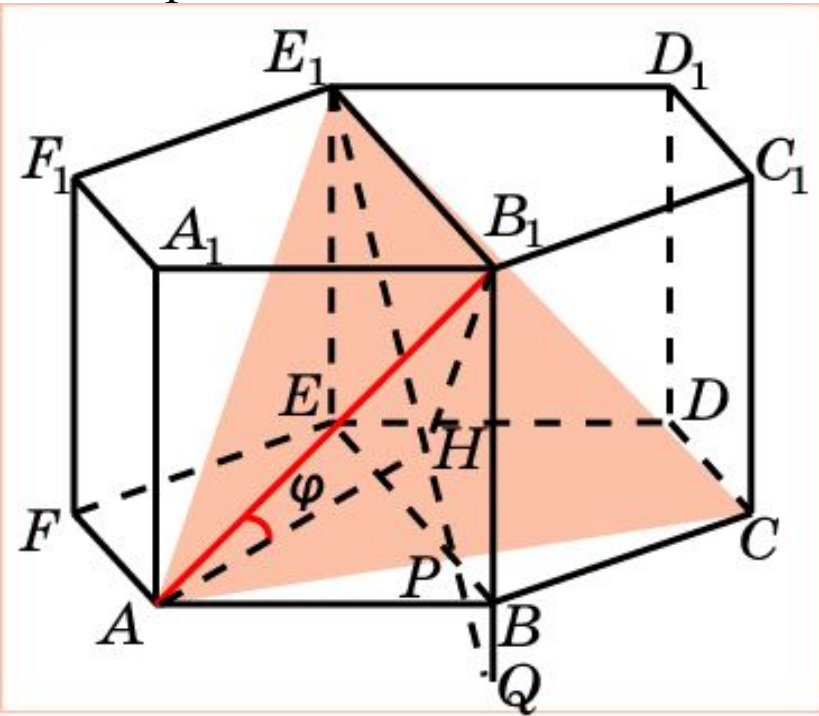
Решение: Плоскость CFF_1 перпендикулярна плоскости BDE_1 и пересекает ее по прямой GG_1 . Прямая GG_1 образует с прямой C_1F_1 угол 45° . Из вершины C_1 опустим перпендикуляр C_1H на прямую GG_1 . В прямоугольном треугольнике C_1G_1H имеем: $C_1G_1 = \frac{3}{2}$, $\angle C_1G_1H = 45^\circ$. Следовательно, $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

В прямоугольном треугольнике BC_1H имеем: $BC_1 = \sqrt{2}$; $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{3}{4}$.

Призма 19*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1 .



Решение: Плоскость BB_1E_1 перпендикулярна плоскости ACE_1 и пересекает ее по прямой QE_1 . В прямоугольном треугольнике QB_1E_1 имеем: $QB_1 = \frac{4}{3}$, $B_1E_1 = 2$.

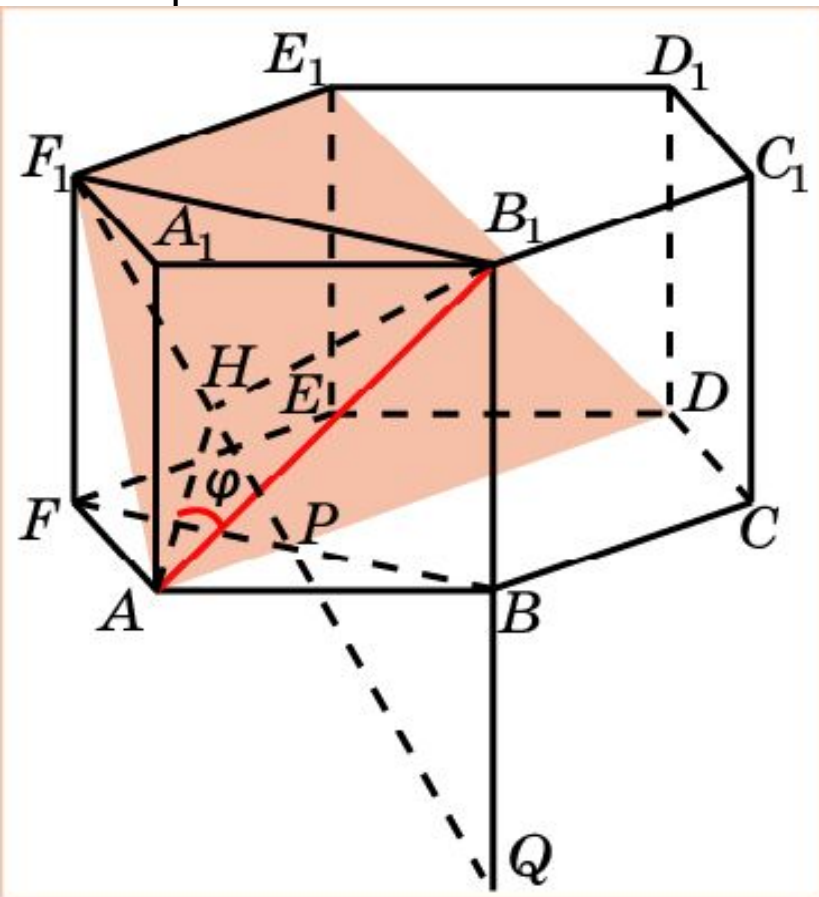
Высота B_1H этого треугольника равна $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{4\sqrt{13}}{13}$.
Следовательно, $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.

Призма 20*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ADE_1 .



Решение: Плоскость BB_1F_1 перпендикулярна плоскости ADE_1 и пересекает ее по прямой QF_1 . В прямоугольном треугольнике QB_1F_1 имеем: $QB_1 = 2$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. Высота B_1H этого треугольника равна $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

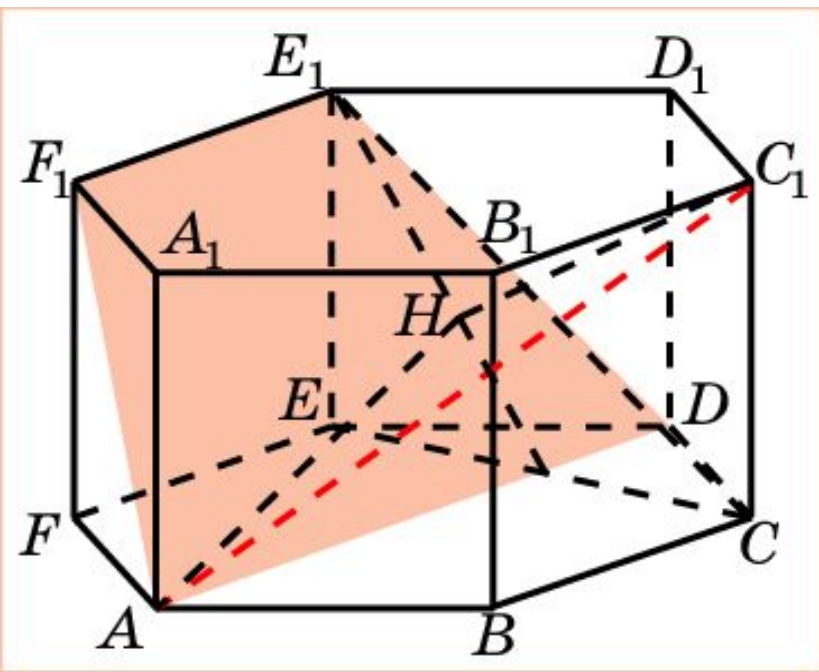
В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{2\sqrt{21}}{7}$,

Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

Призма 21*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью ADE_1 .



Решение: Прямая B_1C_1 параллельна плоскости ADE_1 . Следовательно, расстояние от точки C_1 до плоскости ADE_1 равно расстоянию от точки B_1 до этой плоскости и равно $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике AC_1H имеем: $AC_1 = 2$, $C_1H = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$.