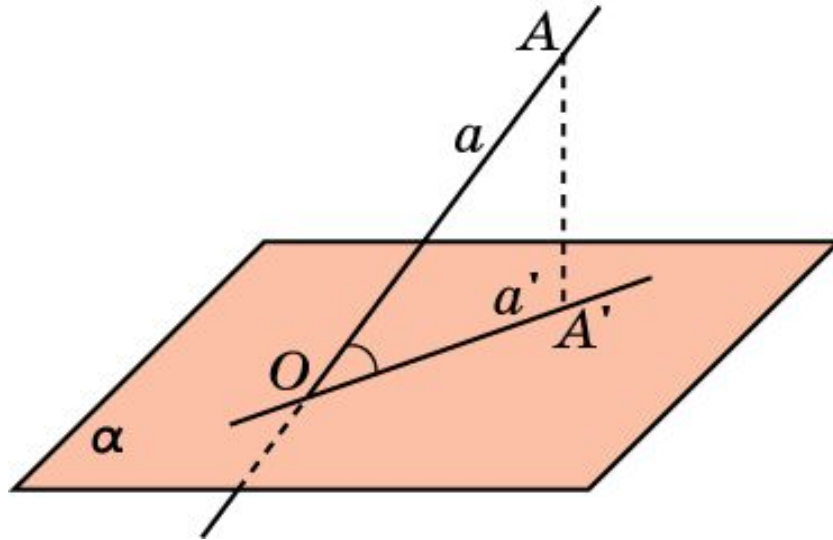


# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

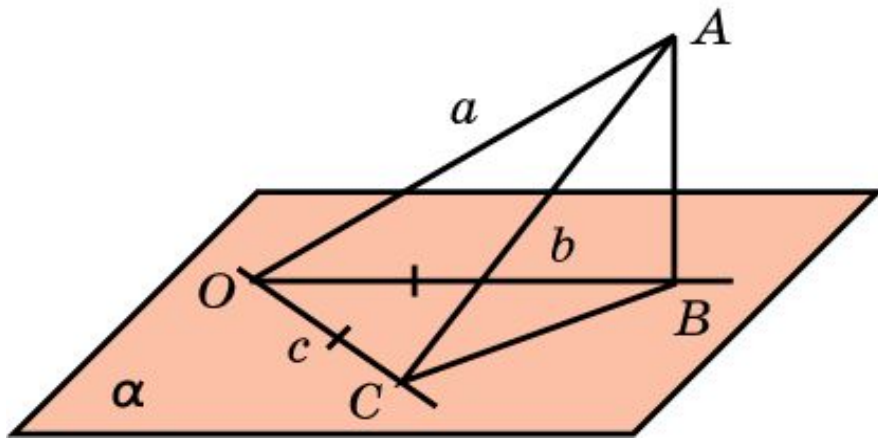
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

**Теорема.** Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.



**Доказательство.** Пусть  $a$  - наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $O$  - их точка пересечения,  $b$  - ортогональная проекция наклонной,  $c$  - прямая в плоскости  $\alpha$ , проходящая через точку  $O$ .

Докажем, что угол между прямыми  $a$  и  $b$  меньше угла между прямыми  $a$  и  $c$ . Для этого на прямой  $a$  возьмем точку  $A$ , отличную от  $O$ , и ее ортогональную проекцию  $B$ . На прямой  $c$  отложим отрезок  $OC$ , равный  $OB$ . В треугольниках  $AOB$  и  $AOC$  сторона  $AO$  общая,  $OB = OC$  и  $AB < AC$ . Следовательно,  $\angle AOB < \angle AOC$ .

## Упражнение 1

Прямые  $a$  и  $b$  образуют с плоскостью  $\alpha$  равные углы.  
Будут ли эти прямые параллельны?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

Две плоскости образуют с данной прямой равные углы.  
Как расположены плоскости относительно друг друга?

Ответ: Параллельны или пересекаются.

### Упражнение 3

Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 4

Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в  $60^\circ$ ? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

Ответ: Нет,  $45^\circ$ .

## Упражнение 5

Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом  $60^\circ$ , а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

Ответ:  $30^\circ$ .

## Упражнение 6

В кубе найдите угол между: а) диагональю боковой грани и плоскостью основания; б) диагональю куба и плоскостью основания; в) диагональю боковой грани и диагональным сечением.

Ответ: а)  $45^\circ$ ; б)  $\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $30^\circ$ .



## Упражнение 7

Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и не содержащей его гранью.

Ответ:  $\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$  .

## Упражнение 8

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , а боковое ребро  $b$ . Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Ответ:  $\cos \phi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$ .

## Упражнение 9

Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

Ответ: Да.

## Упражнение 10

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол  $30^\circ$ . Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ:  $45^\circ$ .

## Упражнение 11

Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости  $\alpha$  (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью  $\alpha$ ). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости  $\alpha$  или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости  $\alpha$ ?

**Ответ:** Угол наклона высоты.

## Упражнение 12

Из вершины  $A$  квадрата  $ABCD$  перпендикулярно его плоскости проведен отрезок  $AK$ , равный 3. Из точки  $K$  опущены перпендикуляры на стороны  $BC$  и  $CD$ . Перпендикуляр из точки  $K$  к стороне  $BC$  равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Ответ:  $30^\circ$ .