

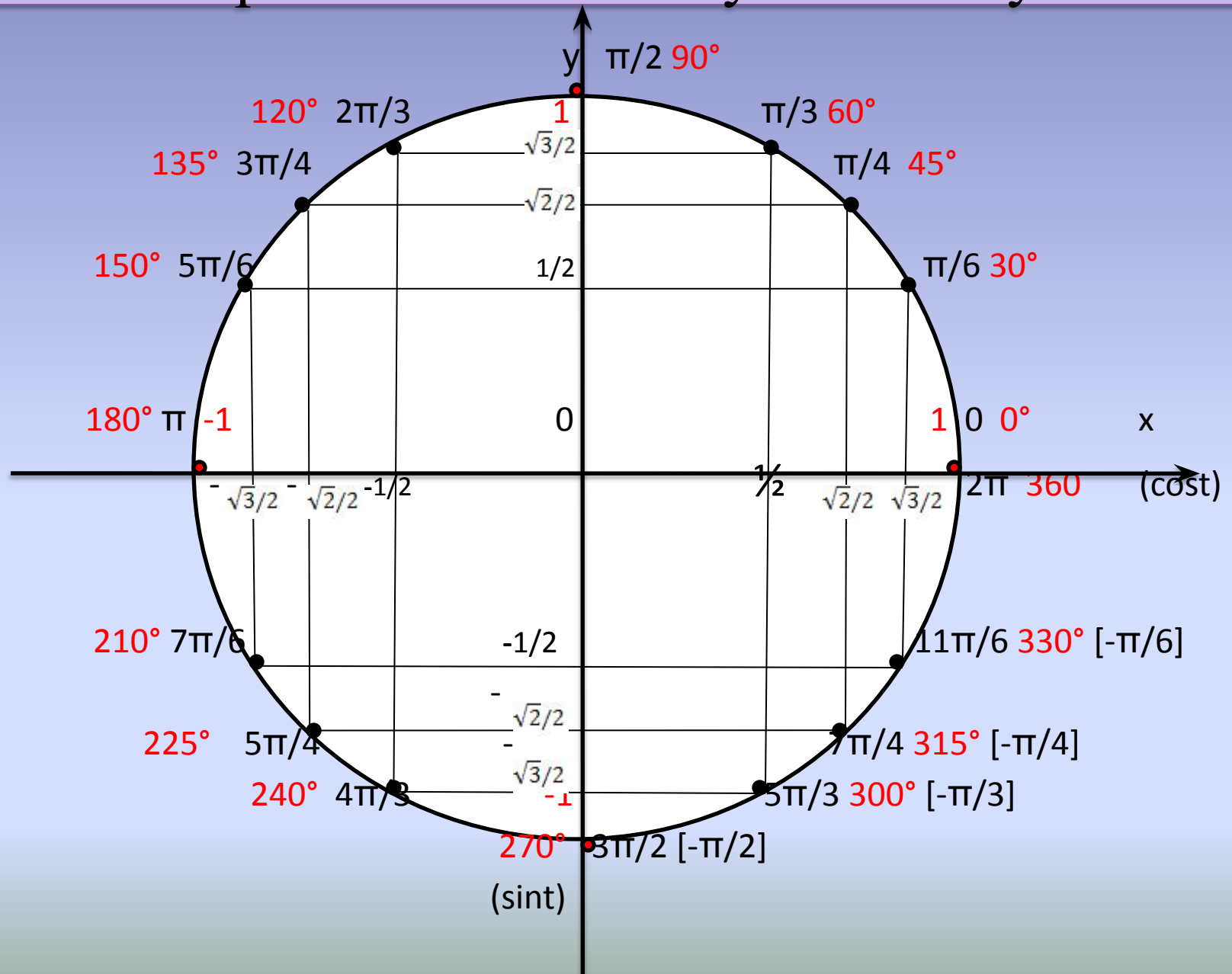
Тригонометрия

Тригонометрические уравнения и неравенства

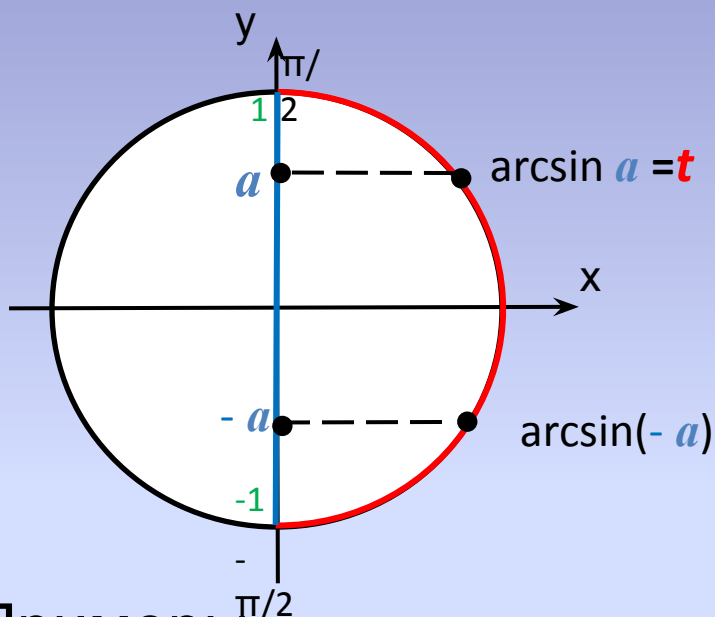
$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + c \cdot \sin x \cos x + b \cos^2 x = 0$$

Повторим значения синуса косинуса



Арксинус



Арксинусом числа a называется такое число (угол) t из $[-\pi/2; \pi/2]$, что $\sin t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

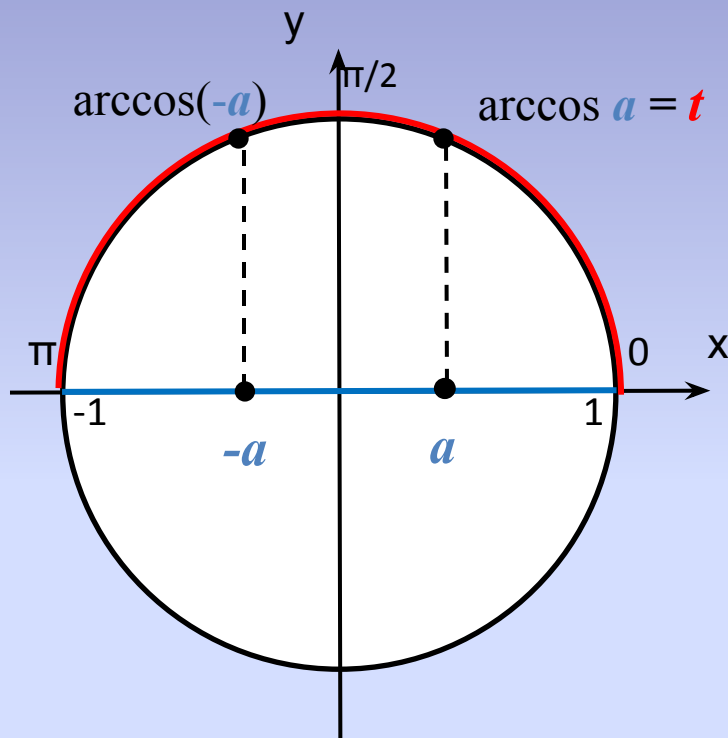
Примеры:

$$1) \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \arcsin 0 = 0$$

$$2) \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

Арккосинус



Арккосинусом числа a называется такое число (угол) t из $[0; \pi]$, что

$$\cos t = a.$$

Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Примеры:

$$1) \arccos(-1) = \pi$$

$$2) \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2x+1)$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ & -2 \leq 2x \leq 0 \\ & -1 \leq x \leq 0 \\ \text{Ответ: } & [-1; 0] \end{aligned}$$

2. $\arccos(5-2x)$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -1 \leq 5-2x \leq 1 \\ & -6 \leq -2x \leq -4 \\ & 2 \leq x \leq 3 \\ \text{Ответ: } & [2; 3] \end{aligned}$$

3. $\arccos(x^2-1)$

$$\begin{aligned} & -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ \text{Ответ: } & [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{aligned}$$

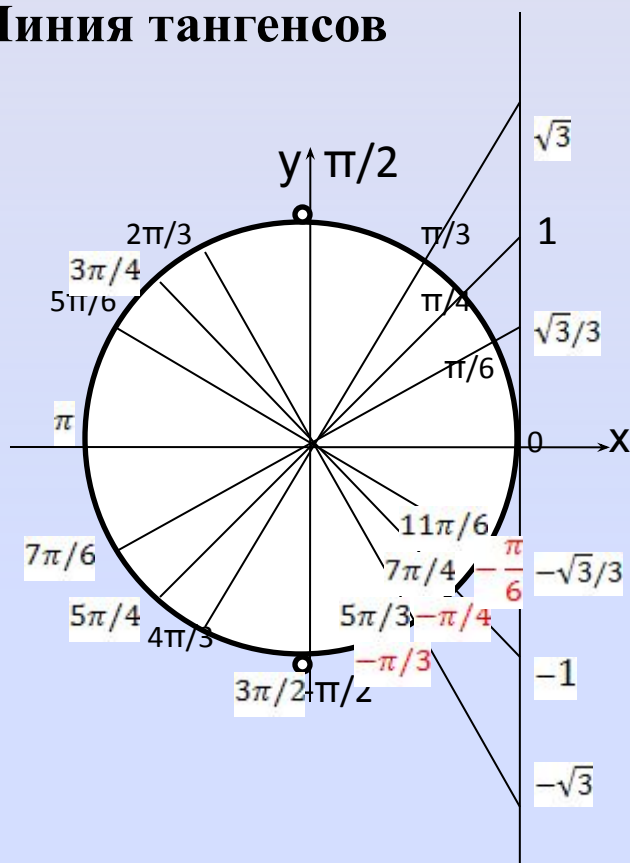
4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$$\begin{aligned} & -1 \leq 4x^2-3x \leq 1 \\ & \begin{cases} 4x^2-3x \geq -1 \\ 4x^2-3x \leq 1 \end{cases} \\ & 4x^2-3x-1 \leq 0 \\ \text{Ответ: } & \left[-\frac{1}{4}; 1\right] \end{aligned}$$

Повторим значения тангенса и котангенса

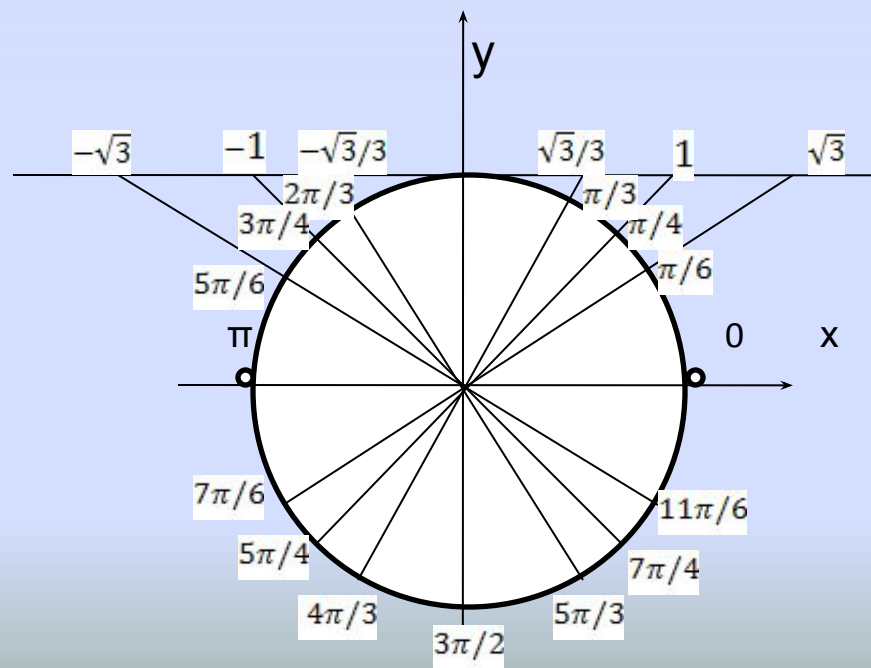
Линия тангенсов

$\operatorname{tg} t \in \mathbb{R}$, но $t \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

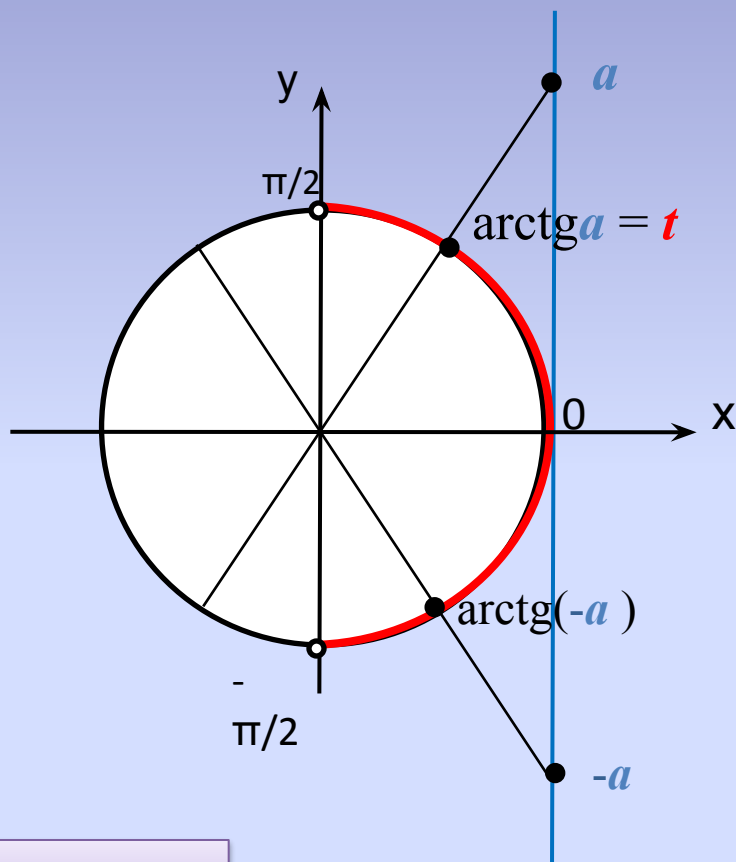


$\operatorname{ctg} t \in \mathbb{R}$, но $t \neq 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Линия котангенсов



Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(-\pi/2; \pi/2)$, что $\text{tg } t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

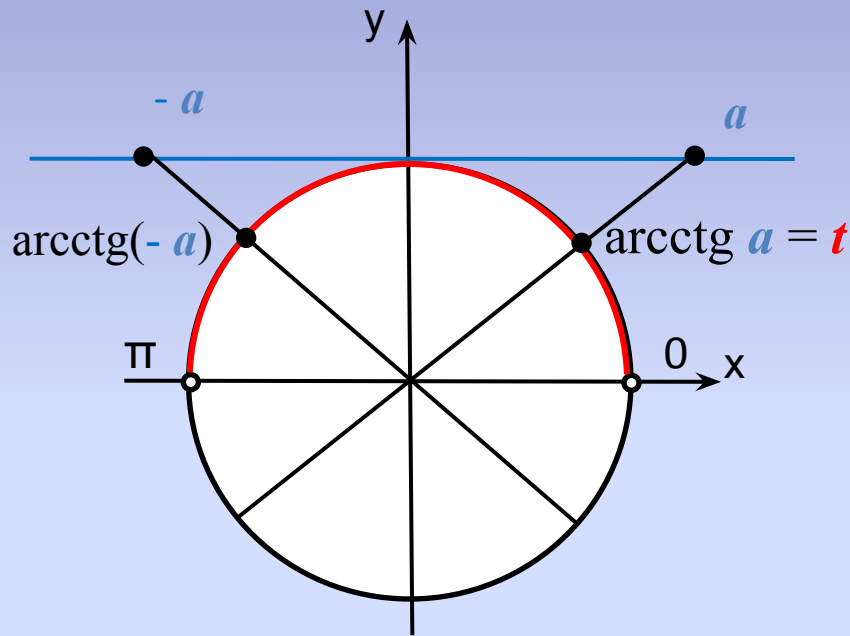
$$\text{arctg}(-a) = -\text{arctg } a$$

Примеры:

$$1) \text{arctg} \sqrt{3}/3 = \pi/6$$

$$2) \text{arctg}(-1) = -\pi/4$$

Арккотангенс



Арккотангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(0; \pi)$,
что $\operatorname{ctg} t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Примеры:

$$1) \operatorname{arcctg}(-1) =$$

$$3\pi/4$$

$$2) \operatorname{arcctg}\sqrt{3} =$$

$$\pi/6$$

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\cos t = 0$

$$t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2) $\cos t = 1$

$$t = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3) $\cos t = -1$

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$

$$t = 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2) $\sin t = 1$

$$t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3) $\sin t = -1$

$$t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3. $\operatorname{tg} t = a$, $a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

4. $\operatorname{ctg} t = a$, $a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Примеры

:

$$1) \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$t = \pm 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin t = 0;$$

Частный случай:

$$t = 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \operatorname{tg} t = 1;$$

$$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$t = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$$

$$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$t = 5\pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Решение простейших уравнений

1) $\operatorname{tg} 2x = -1$

$$2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos(x + \pi/3) = 1/2$

$$x + \pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам
приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Другие тригонометрические уравнения

1.Сводимые к квадратным

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда

$$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

1)Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

2)Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

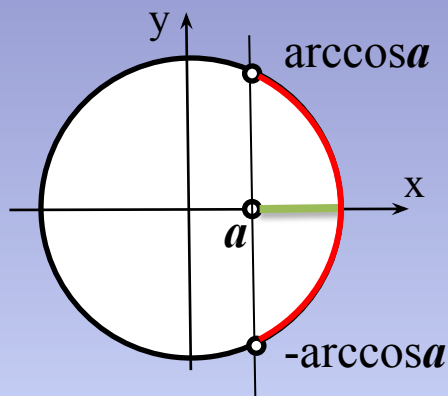
Разделим обе части на $\cos^2 x$.

Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

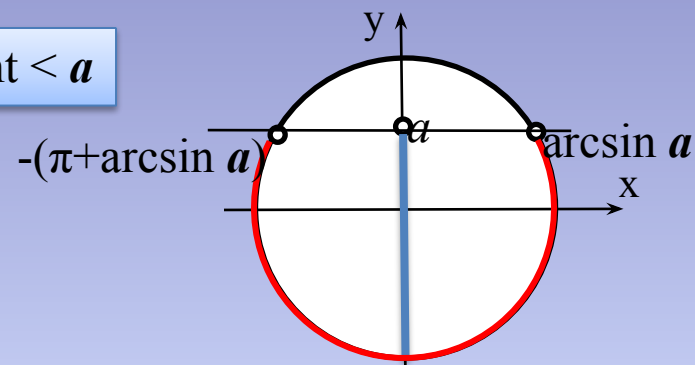
Простые тригонометрические неравенства

1) $\cos t > a$



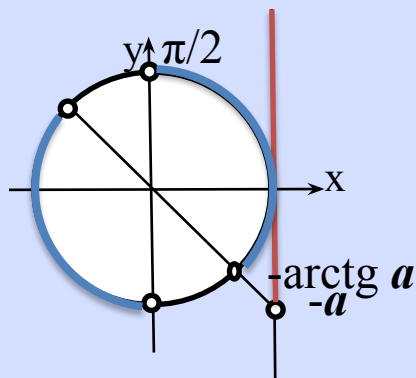
Ответ: $(-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin t < a$



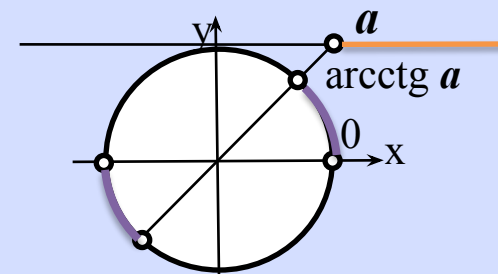
Ответ: $(-(\pi + \arcsin a) + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

3) $\tan t > -a$



Ответ: $(-\arctg a + \pi k; \pi/2 + \pi k), k \in \mathbb{Z}$

4) $\cot t > a$



Ответ: $(0 + \pi k; \arctg a + \pi k), k \in \mathbb{Z}$