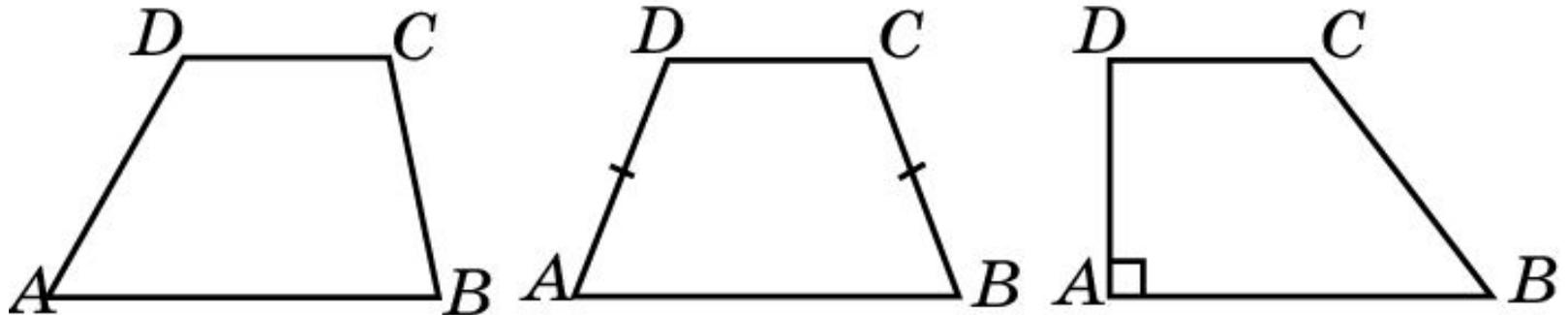


Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.



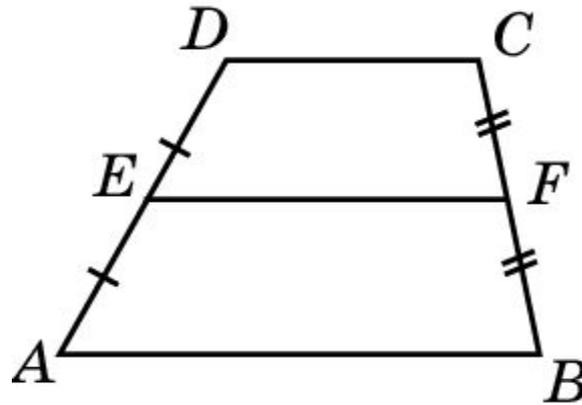
Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а непараллельные стороны – **боковыми сторонами**.

Трапеция называется **равнобедренной**, если ее боковые стороны равны.

Трапеция называется **прямоугольной**, если один из ее углов прямой.

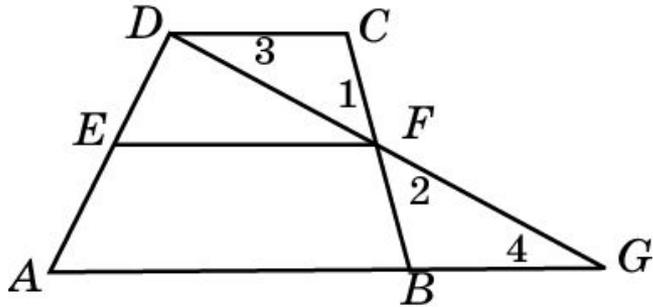
Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.



Теорема о средней линии трапеции

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Доказательство. Пусть EF – средняя линия трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Проведем прямую DF и ее точку пересечения с прямой AB обозначим G .

Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, угол 1 равен углу 2, как вертикальные, угол 3 равен углу 4, как накрест лежащие углы). Из равенства этих треугольников следует, что $DF = GF$ и, значит, EF – средняя линия треугольника AGD . Из теоремы о средней линии треугольника следует, что EF параллельна AB и $EF = AG$. Так как $AB \parallel CD$, то EF будет параллельна обоим основаниям и кроме того, $EF = AG/2 = (AB + BG)/2 = (AB + CD)/2$.

Вопрос 1

Какой четырехугольник называется трапецией?

Ответ: Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Вопрос 2

Какие стороны трапеции называются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

Ответ: а) Основаниями трапеции называются ее параллельные стороны;
б) боковыми сторонами трапеции называются ее непараллельные стороны.

Вопрос 3

Какая трапеция называется: а) равнобедренной;
б) прямоугольной?

Ответ: а) Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны;
б) трапеция называется прямоугольной, если один из ее углов прямой.

Вопрос 4

Что называется средней линией трапеции?

Ответ: Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

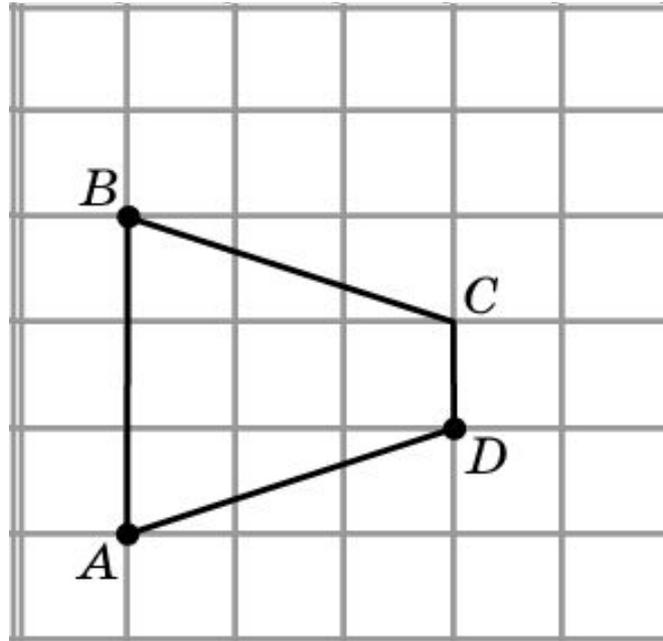
Вопрос 5

Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

Ответ: Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Упражнение 1

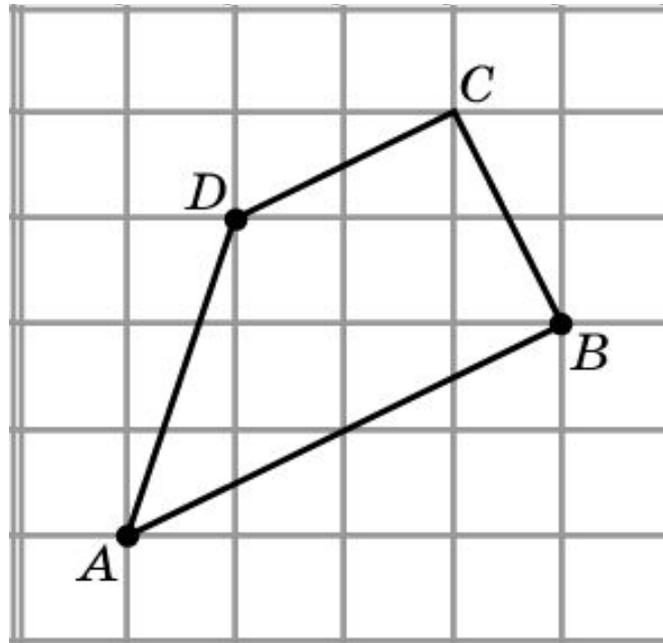
Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке, а четвертая находится в одном из узлов сетки.



Ответ:

Упражнение 2

Изобразите прямоугольную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке, а четвертая находится в одном из узлов сетки.

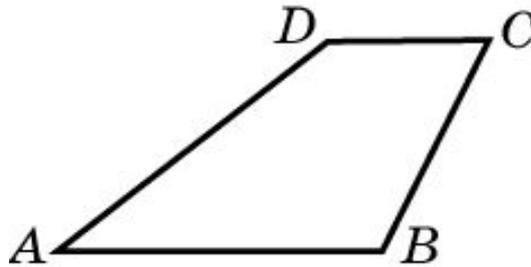


Ответ:

Упражнение 3

Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один острым, а другой тупым?

Ответ: Да.



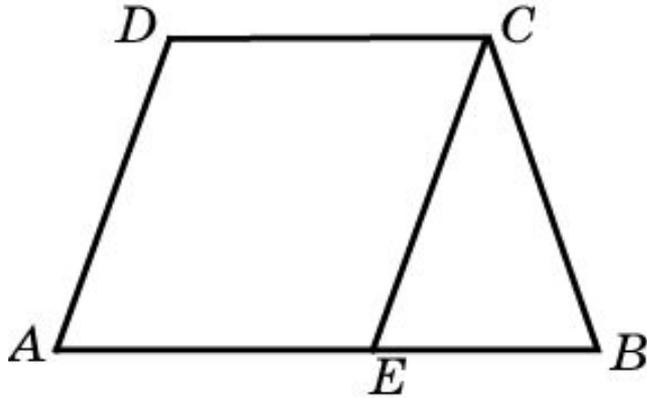
Упражнение 4

Может ли у трапеции быть: а) три прямых угла;
б) три острых угла?

Ответ: а) Нет; б) нет.

Упражнение 5

Докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция, AD не параллельна BC . Докажем, что углы A и B равны.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AD и обозначим E ее точку пересечения с прямой AB .

Четырехугольник $AECD$ – параллелограмм, следовательно, угол BAD равен углу BEC . Треугольник BCE – равнобедренный, следовательно, угол BCE равен углу BEC . Таким образом, в трапеции $ABCD$ угол A равен углу B .

Упражнение 6

Верно ли, что если два угла трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Нет, она может быть прямоугольной.

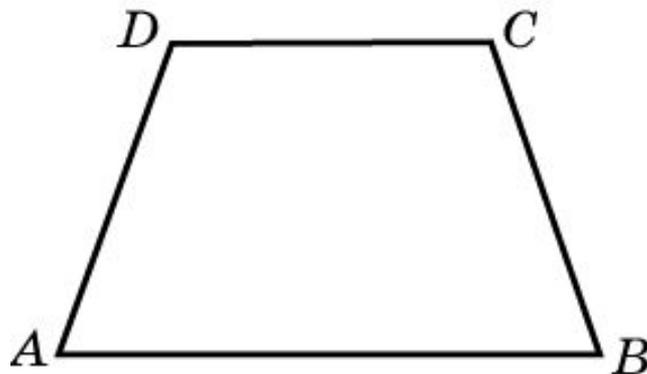
Упражнение 7

Верно ли, что если два угла при основании трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Да.

Упражнение 8

Докажите, что сумма двух противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° .



Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция, AD не параллельна BC . Докажем, что сумма углов A и C равна 180° . Действительно, сумма углов B и C равна 180° . Угол A равен углу B . Следовательно, сумма углов A и C равна 180° .

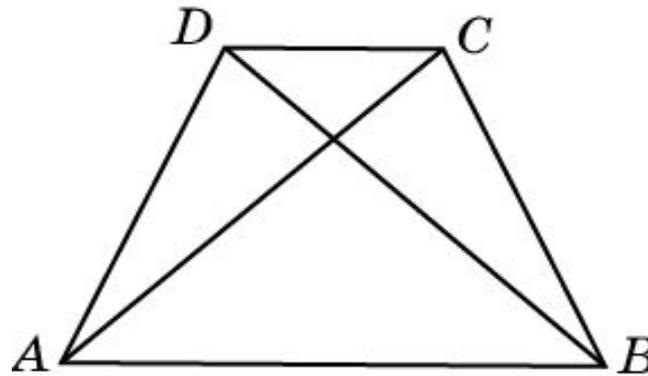
Упражнение 9

Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 40° ?

Ответ: $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$.

Упражнение 10

Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Треугольники ABC и BAD равны (AB – общая сторона, $BC = AD$, угол ABC равен углу BAD). Следовательно, $AC = BD$.

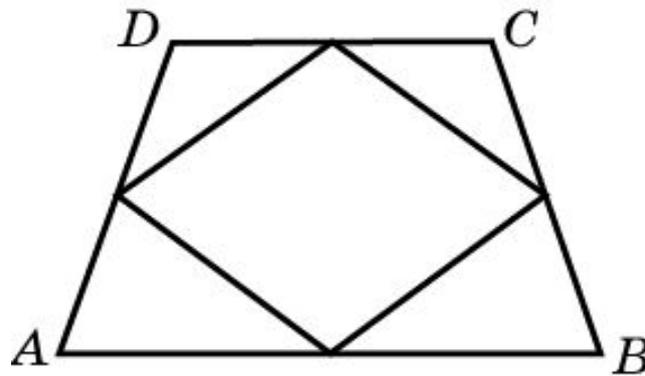
Упражнение 11

Верно ли, что если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Да.

Упражнение 12

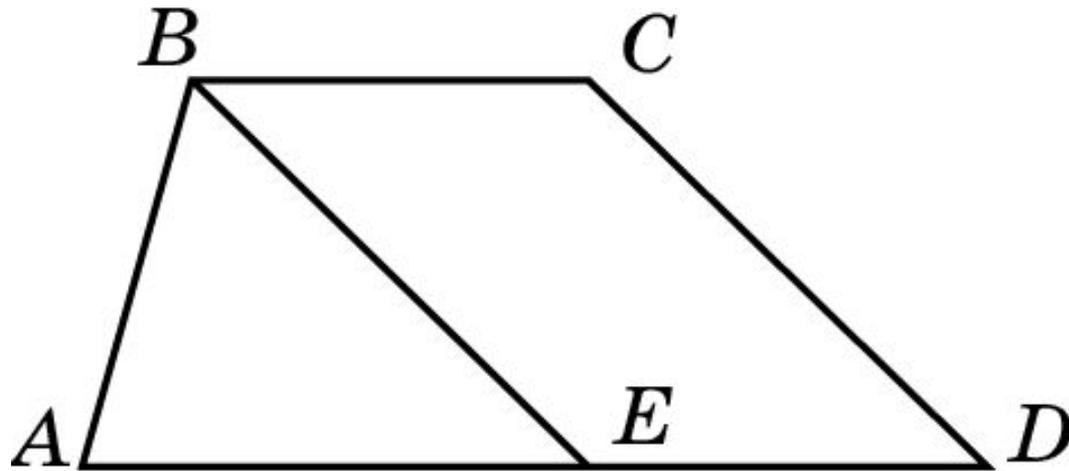
Определите вид четырехугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.



Ответ: Ромб.

Упражнение 13

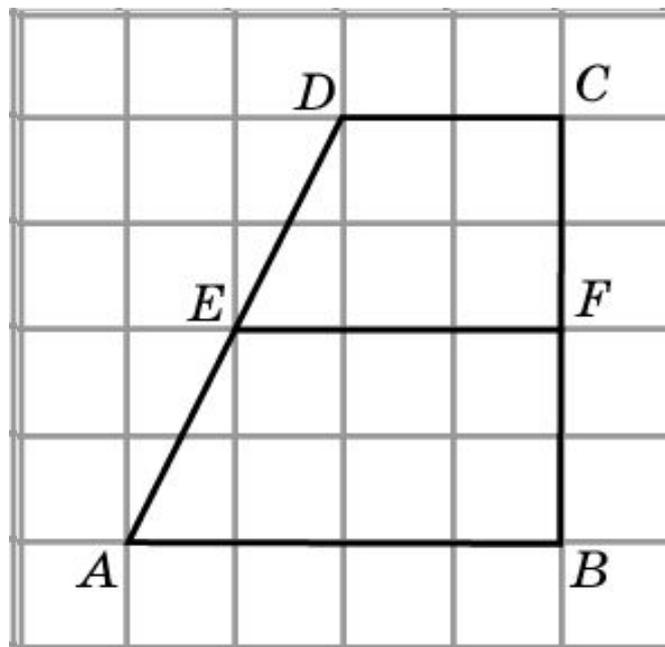
Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см, отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.



Ответ: 21 см.

Упражнение 14

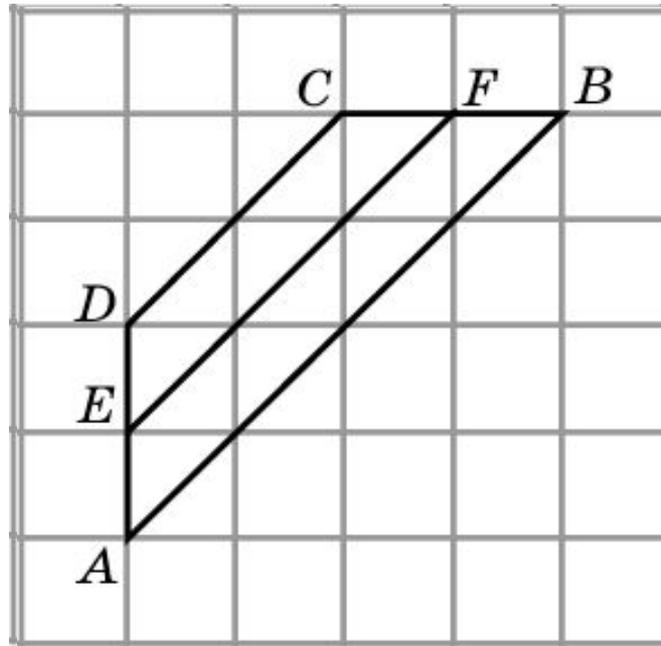
Проведите среднюю линию трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ:

Упражнение 15

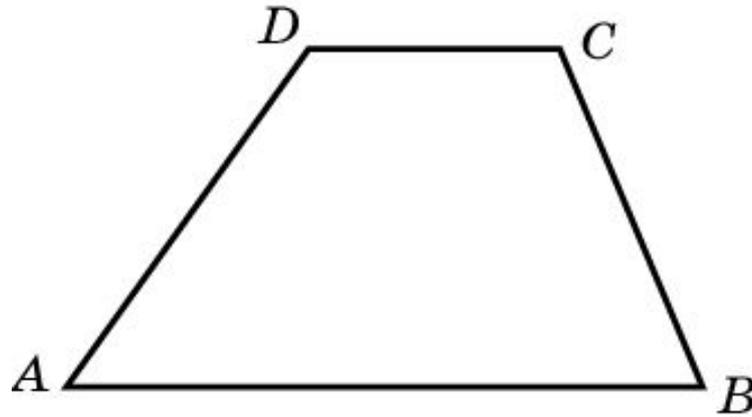
Проведите среднюю линию трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ:

Упражнение 16

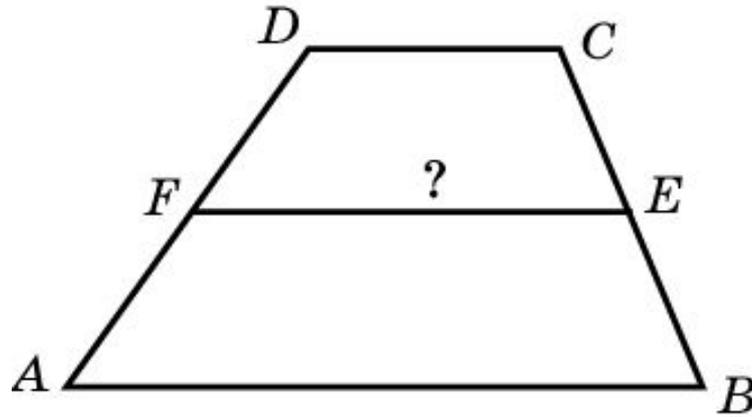
Основания трапеции относятся как 5:2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 21 см.

Упражнение 17

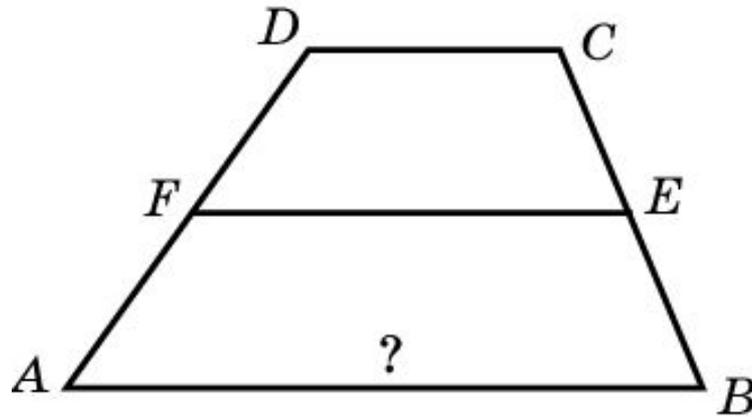
Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 15 см.

Упражнение 18

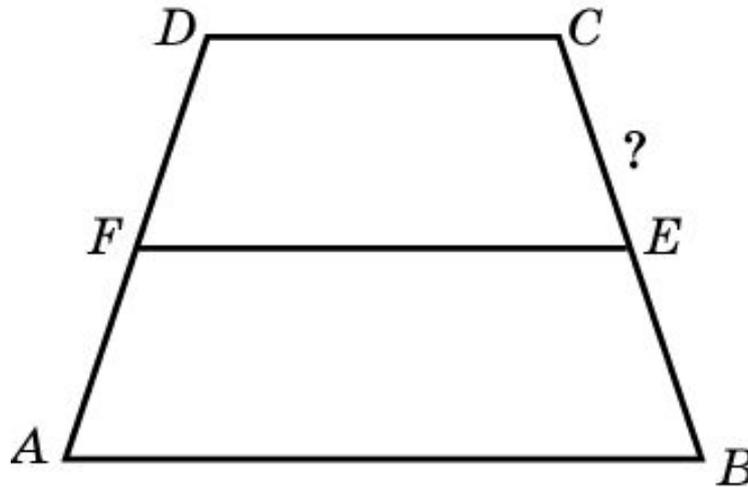
Средняя линия трапеции равна 30 см, а меньшее основание равно 20 см. Найдите большее основание.



Ответ: 40 см.

Упражнение 19

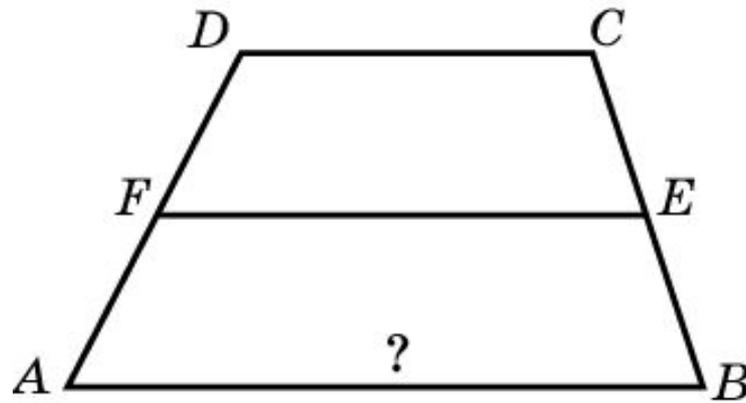
Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.



Ответ: 20 см.

Упражнение 20

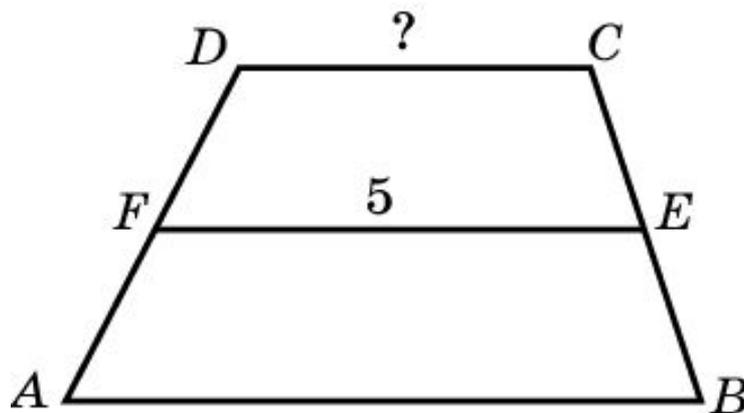
Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.



Ответ: 5 см и 9 см.

Упражнение 21

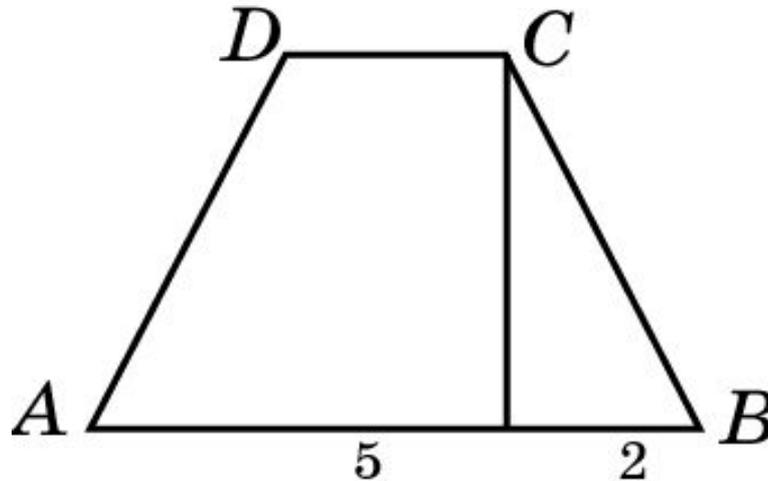
Основания трапеции относятся как $2 : 3$, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.



Ответ: 4 м и 6 м.

Упражнение 22

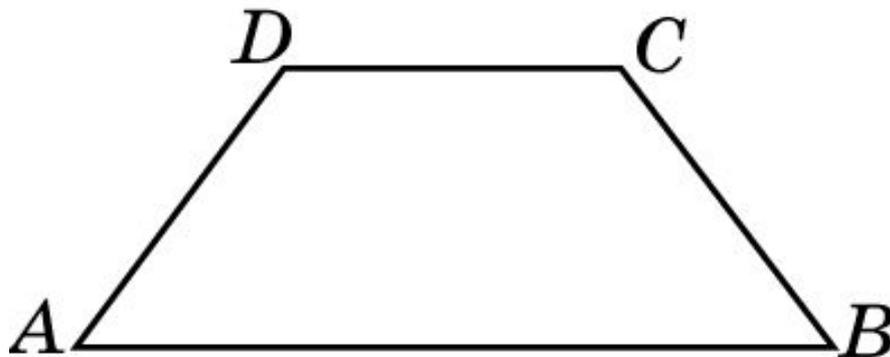
Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Ответ: 5 см.

Упражнение 23

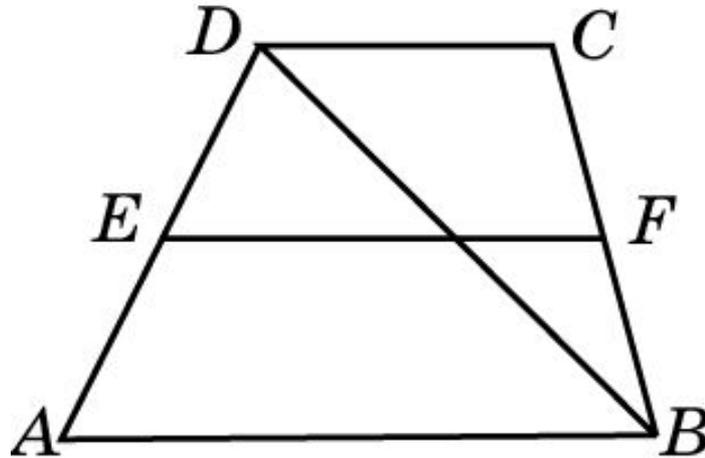
В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60° . Найдите меньшее основание.



Ответ: 1,7 м.

Упражнение 24

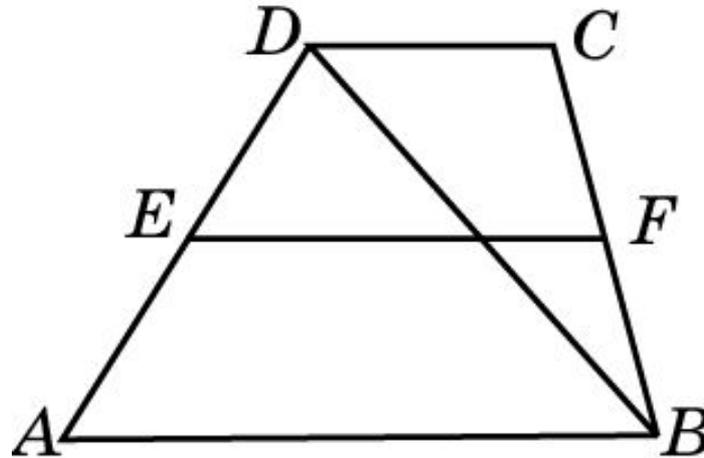
Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания этой трапеции.



Ответ: 8 см и 12 см.

Упражнение 25

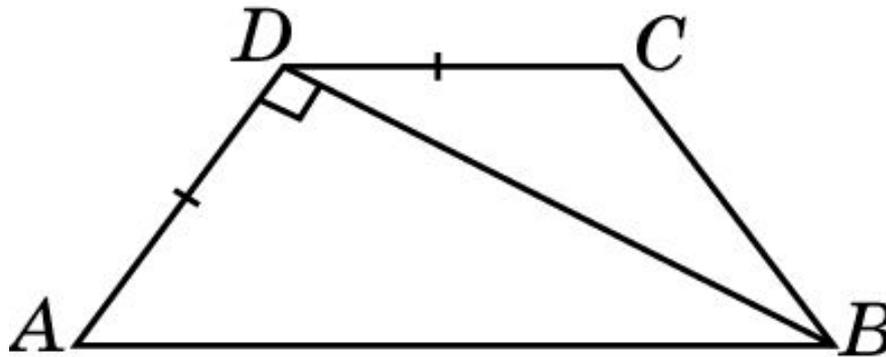
Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



Ответ: 2 см и 5 см.

Упражнение 26

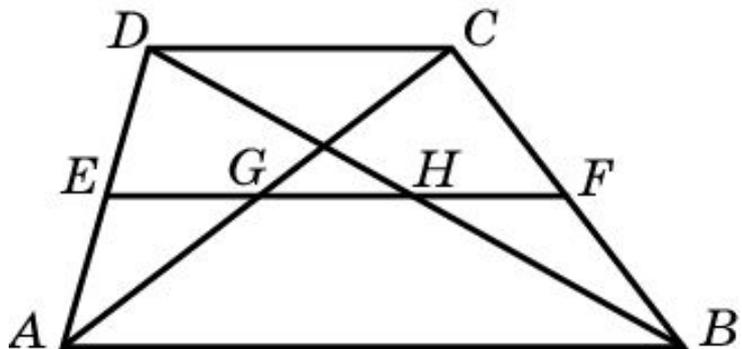
Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.



Ответ: $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

Упражнение 27*

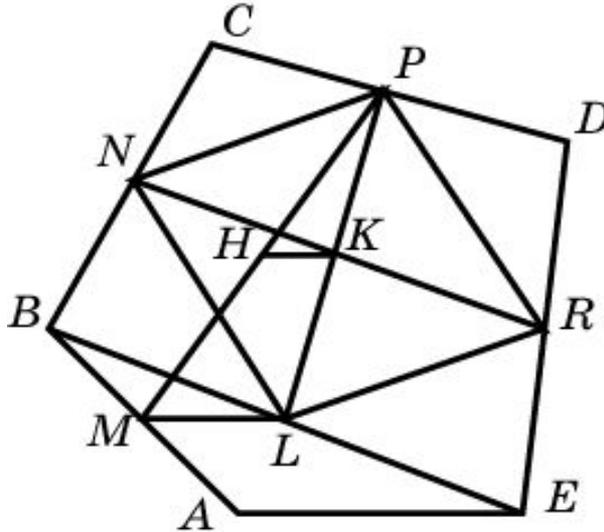
Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?



Решение: Нет. Действительно, пусть $ABCD$ – трапеция, EF – средняя линия, G, H – ее точки пересечения с диагоналями. Тогда EG – средняя линия треугольника ACD и, следовательно, равна половине CD . FH – средняя линия треугольника BCE и, следовательно, равна половине CE . Если бы точки G и H совпадали, то средняя линия EF была бы равна CD . В этом случае трапеция была бы параллелограммом.

Упражнение 28*

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE = 4$. Середины сторон AB и CD , BC и ED соединены отрезками. Середины H и K этих отрезков снова соединены отрезками. Найдите длину отрезка HK .



Решение: Пусть M, N, P, R, L – середины соответствующих сторон. Тогда $HK = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}AE = 1$.