

Лекция 19.

Тема: Транспортная задача.

Цель: Рассмотреть метод «северо-западного угла». Узнать понятие цикла пересчета и его свойства. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

Метод Северо- западного угла. Метод минимальной стоимости (элемента).

ПРИМЕР. В резерве трех железнодорожных станций *A, B, C* находятся соответственно *60, 80, 100* вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к 4-ем пунктам погрузки хлеба, если пункту *№1* необходимо *40* вагонов, *№2* – *60*, *№3* – *80*, *№4* – *60*. Стоимость перегонов одного вагона со станции *A* в указанные пункты соответственно равны *1, 2, 3, 4* ден.ед., со станции *B* – *4, 3, 2, 0* ден.ед. и со станции *C* – *0, 2, 2, 1* ден.ед..

Постав- щики	Потребители				Запасы
	1	2	3	4	
А	40 1	20 2	— 3	— 4	60
В	— 4	40 3	40 2	— 0	80
С	— 0	— 2	40 2	60 1	100
Потреб- ности	40	60	80	60	240

$$m = 3; \quad n = 4; \quad m+n-1 = 6 \quad \Rightarrow$$

План опорный

$$x(x_{11} = 40; \quad x_{12} = 20; \quad x_{22} = 40; \quad x_{23} = 40; \quad x_{33} = 40; \quad x_{34} = 60)$$

Общая стоимость составленного плана:

$$\begin{aligned} Z &= 40 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 60 \cdot 1 = \\ &40 + 40 + 120 + 80 + 80 + 60 = 420 \end{aligned}$$

Это не оптимальное решение.

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то очевидно, что план будет ближе к оптимальному.

Суть метода минимальной стоимости (элемента)

заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ему соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j .

Затем из рассмотренного исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец. Затем из оставшейся части опять выбирают наименьшую стоимость и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Итак, опорный план трансформированной задачи построен, теперь надо из него получить оптимальный. Можно было получить оптимальный план используя симплекс-метод, но в нашем случае симплексная таблица будет содержать mn неизвестных, что приведет к громоздким вычислениям.

**Поэтому для нахождения
оптимального плана
транспортной задачи
используют другие методы,
самый распространенный из
которых метод потенциалов.**

Метод потенциалов.

Теорема. Если план $\overline{X}^* = \{ \overline{x_{ij}} \}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i и v_j удовлетворяющим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \overline{x_{ij}} > 0$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \overline{x_{ij}} = 0$$

Числа u_i и v_j называют потенциалами поставщиков и потребителей

**Для того чтобы план был оптимальным,
необходимо выполнение следующих условий:**

- 1.) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равно стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке;**
- 2.) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше, либо равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке.**

**Если хотя бы одна незанятая
клетка удовлетворяет условию
(2), то опорный план не
является оптимальным, и его
улучшают, перемещая в клетку
некоторое количество единиц
груза).**

Проверяем условие оптимальности для незанятых клеток: если $U_i + V_j > C_{ij}$, то план не является оптимальным, и для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину $(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ и записываем в левый нижний угол.

***Выбор клетки в которую необходимо
послать перевозку: транспортная задача
линейного программирования решается
на $\min$ линейной функции, поэтому
алгоритм ее решения тот же, что и
алгоритм симплекс-метода.***

Загрузке подлежит в первую очередь

клетка, которой соответствует $\left[(U_i + V_j) - C_{ij} > 0 \right]$

Построение цикла и определение величины перераспределения груза:
отмечаем знаком « + » незанятую клетку, которую надо загрузить (знаки (-;+) чередуются). Затем находим $\min x_{ij}$, где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком « - ».

Величина $\min x_{ij}$ определяет сколько единиц груза надо перераспределить.



После перераспределения должно получиться $m+n-1$ занятых клеток.

Если для какой-либо клетки условие оптимальности не выполняется, то можно улучшить решение двойственной задачи, а заодно и исходной задачи, сделав эту клетку занятой и перебросив груз по циклу.



Для свободных клеток сумма потенциалов меньше, либо равна стоимости, следовательно в последней таблице должно быть получено оптимальное решение исходной транспортной задачи.

Открытая модель транспортной задачи.

Закрытой называется транспортная задача, для которой выполняется

условие $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. В

противном случае задача называется *открытой*.

Для такой задачи может быть два случая:

1.) Суммарные запасы превышают

суммарные потребности $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$;

2.) Суммарные потребности превышают

суммарные запасы $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$.

Линейная функция остается без изменения, изменяются только ограничения.

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$(a) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_{ij} & i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = b_{ij} & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_{ij} & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_{ij} & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

**Открытая модель задачи решается
приведением к закрытой:**

**а) Вводится фиктивный потребитель B_{n+1}
потребности которого**

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

**б) Вводится фиктивный поставщик A_{n+1}
запасы которого**

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

**Стоимость перевозки
единицы груза в этих
случаях полагают равными
нулю, т.к. груз в обоих
случаях не перевозится.**

Вопросы:

- 1) Чем различаются открытая и закрытая модели транспортной задачи?
- 2) В чем заключается метод потенциалов решения транспортной задачи?