

# **Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

## **Лекция 3. Типовые математические модели**

# Примеры моделей

## Оптимизационные модели

Математическая оптимизационная модель должна содержать следующие основные компоненты:

- *Переменные* – значения, которых необходимо вычислить.
- *Целевая функция* – цель, записанная математически в виде функции от переменных. Обязательно указывается, что необходимо сделать с этой функцией для решения проблемы: найти ее максимум или минимум.
- *Ограничения* – записанные, математически ограничения, выявленные из анализа предметной ситуации.

# Примеры моделей

## Оптимизационные модели

### Задача распределения ресурсов

На предприятии, выпускающем неоднородную продукцию, руководители хотят определить уровни производства этой продукции на некоторый период времени.

Исходные данные:

- количество материалов ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), требуемых на каждом этапе технологического процесса для выпуска единицы продукции;
- объем запасов этих материалов на складе;
- доход, получаемый в результате выпуска единицы продукции.

Цель планирования – увеличение прибыли.

# Примеры моделей

## Оптимизационные модели Задача распределения ресурсов

|                                                   |                           | Этапы технологического процесса |       |     |    | ресурсы |
|---------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|-------|-----|----|---------|
|                                                   |                           | 1                               | 2     | 3   | 4  |         |
| Требуемые ресурсы (кг, бочки, литры, ящики т.п.). | количество материала X    | 1                               | 1     | 1,5 | 2  | 30      |
|                                                   | количество материала Y    | 2                               | 5     | 3   | 7  | 120     |
|                                                   | количество материала Z    | 3                               | 5     | 10  | 15 | 100     |
|                                                   | Доход с единицы продукции | 4                               | 5     |     |    |         |
|                                                   | Объем выпуска             |                                 | $x_2$ |     |    |         |

целевая функция (критерий):

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \max.$$

ограничения:

$$x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 2x_4 \leq 30,$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 120,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

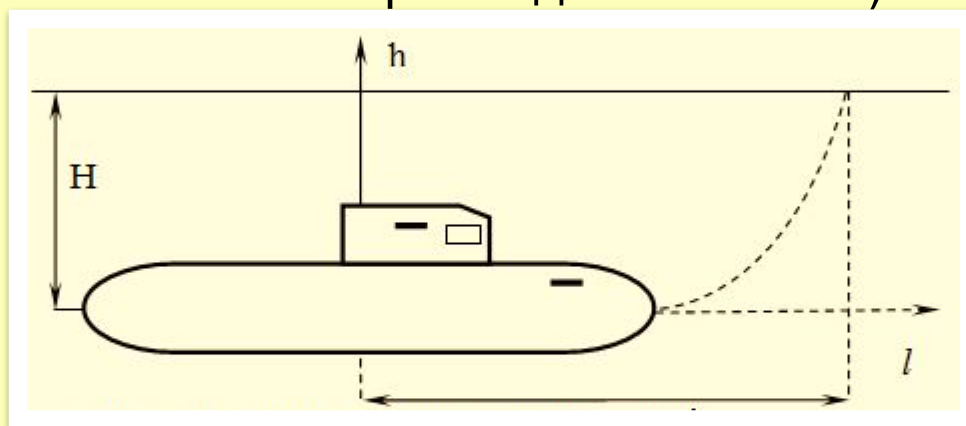
# Описательные (дескриптивные) модели

- **Основная задача:** описание процесса с помощью математического аппарата в целях изучения поведения систем и прогнозирования их дальнейшего развития.
- **Виды моделей:**
  - Регрессионные модели
  - Модели кластеризации
  - Модели ассоциации
- **Области применения:**
  - в практике маркетинговых исследований
  - интеллектуальный анализ данных
  - отражение содержания и основных свойств экономических объектов

# Основные подходы к моделированию

## Использование законов природы

- Пример 1. Всплытие подводной лодки (используются законы Архимеда и Ньютона)



$$h(l) = \frac{1}{2} g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1 v^2} l^2$$

закон сохранения количества движения (импульса)).

$$V_{\max} = U \cdot \eta \frac{m_0}{m_{\Pi} + m_K}$$

# Основные подходы к моделированию

## Принцип аналогии

- **Применение аналогий основано на свойстве моделей:**
  - универсальности, т.е. применимости к объектам принципиально различной природы.
- **Системы можно представить как совокупность простых элементов типа:**
  - резистора, оказывающего сопротивление переносу субстанции,
  - конденсатора, обладающего свойством инерционности, что проявляется в стремлении сохранить поток субстанции неизменным.

# Основные подходы к моделированию

## Использование типовых моделей

- В качестве *детерминированных* моделей:
  - дифференциальные и интегральные уравнения
  - конечные автоматы
  - сетевые модели
- В качестве *стохастических* моделей:
  - вероятностные автоматы
  - системы массового обслуживания
  - игровые модели

# Иерархический подход к получению моделей

## Процесс построения моделей

- Словесное описание объекта или явления, т.е. сформировываются предметная модель и цели исследования модели
- Выбирается или формулируется закон, которому подчиняется объект. Модель записывается в математической форме.
- Завершается построение модели. Проводится селекция факторов, при которой отбрасываются несущественные и малозначимые факторы.
- Построенная модель исследуется и делается вывод о ее адекватности, т.е. соответствии объекту и целям исследования.

# Конечные автоматы

- *Автомат* можно рассматривать как некоторое устройство (черный ящик), на которое подаются входные сигналы, снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния.
- *Состояние* – это то, на что влияет управление, и что вместе с управлением определяет результат (выход).
- *Конечным автоматом* называется автомат, у которого множество внутренних состояний, входных и выходных сигналов являются конечными множествами.
- Работа конечного автомата описывается двумя функциями:

$$x(t+1) = \varphi(x(t), u(t)) \quad \text{- функция переходов}$$

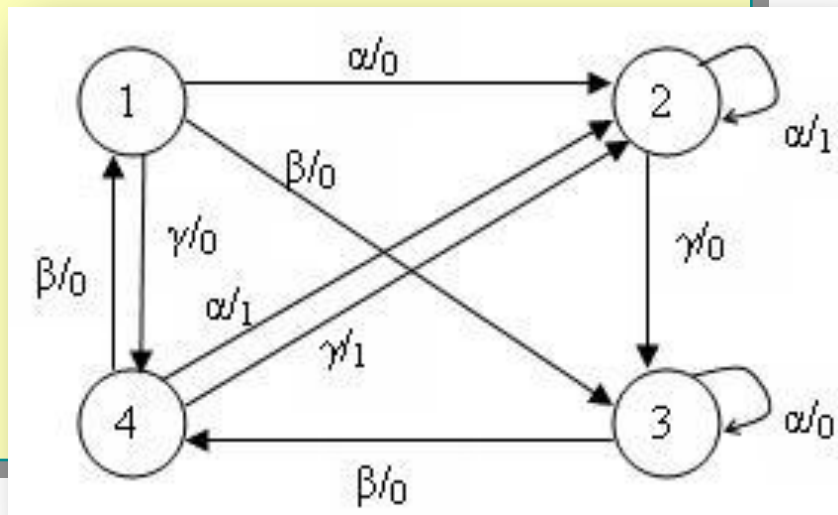
- функция выхода

- $y(t) = f(x(t), u(t))$
- $x$  – переменная состояния;  $u$  – переменная управления;
- $y$  – переменная выхода;  $t$  – момент времени ( $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

# Конечные автоматы

- **Задание автомата в виде таблицы и графа**
- При изображении функций в виде графа: состояния приписывают вершинам, управления – дугам.
  - **Пример 1.** Пусть множество управлений  $u$  состоит из управлений  $\alpha, \beta, \gamma$ , множество состояний  $x$  – состояний 1,2,3,4, т. е.  $u \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $x \in \{1,2,3,4\}$ ,  $y \in \{0,1\}$ .
- **Функции  $\varphi$  (переходов) и  $f$  (выхода) заданы таблицей переходов:**  
**и в виде направленного графа:**

| $x(t)$ | $u(t)$          |                 |                 |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------|
|        | $\alpha$        | $\beta$         | $\gamma$        |
| 1      | 2/ <sub>0</sub> | 3/ <sub>1</sub> | 4/ <sub>0</sub> |
| 2      | 2/ <sub>1</sub> | -               | 3/ <sub>0</sub> |
| 3      | 3/ <sub>0</sub> | 4/ <sub>0</sub> | -               |
| 4      | 2/ <sub>1</sub> | 1/ <sub>0</sub> | 2/ <sub>1</sub> |



# Конечные автоматы

## ■ Задание автомата в виде таблицы и графа

- Пример 2.** Рассмотрим автомат, который выдает билет при опускании в него монет в сумме 3 руб., причем он принимает монеты 50 коп., 1 рубль и 2 рубля. Автомат может давать сдачу. Требуется составить функцию перехода и выхода.

$u \in \{\alpha=0,5, \beta=1, \gamma=2\}, x \in \{1,2,3,4,5,6\}, y_1 \in \{0,1\}, y_2 \in \{0, 0.5, 1, 1.5\}$

- Функция переходов

|     |   | $u$      |         |          |
|-----|---|----------|---------|----------|
|     |   | 0.5      | 1.0     | 2.0      |
| $x$ |   | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| 0   | 1 | 2        | 3       | 5        |
| 0.5 | 2 | 3        | 4       | 6        |
| 1.0 | 3 | 4        | 5       | 1        |
| 1.5 | 4 | 5        | 6       | 1        |
| 2.0 | 5 | 6        | 1       | 1        |
| 2.5 | 6 | 1        | 1       | 1        |

- Функция выхода

|     |  | $u$      |         |          |
|-----|--|----------|---------|----------|
|     |  | 0,5      | 1       | 2        |
| $x$ |  | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| 1   |  | 0;0      | 0;0     | 0;0      |
| 2   |  | 0;0      | 0;0     | 0;0      |
| 3   |  | 0;0      | 0;0     | 1;0      |
| 4   |  | 0;0      | 0;0     | 1;0,5    |
| 5   |  | 0;0      | 1;0     | 1;1      |
| 6   |  | 1;0      | 1;0,5   | 1;1,5    |

# Конечные автоматы

- Матричное задание автомата
- Матрица переходов – квадратная матрица, размерность которой совпадает с числом состояний, а элементами являются дуги, соединяющие состояния

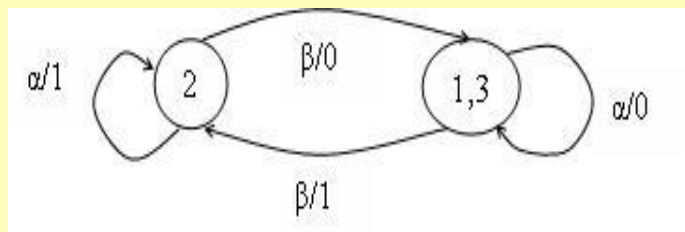
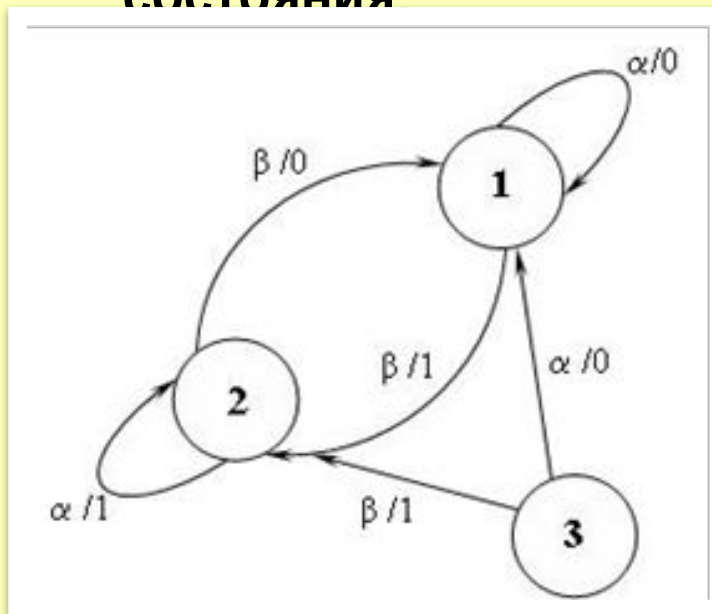
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \beta + \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha + \beta + \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Минимизация конечных автоматов

- ***Минимизация автоматов*** – сокращение числа состояний путем объединения эквивалентных состояний.
- **Состояния называются эквивалентными**, если поведение автомата одинаково независимо от того, какое из них является исходным.
- **Состояние называется  $k$ -эквивалентным**, если автомат, находясь в любом из них, имеет одинаковое поведение в течение  $k$  тактов.
- **$k$ -эквивалентные состояния образуют  $k$ -эквивалентные классы.**

# Определение эквивалентных состояний автомата

- Автомат представлен в виде графа . Требуется определить, есть ли у автомата эквивалентные состояния



| x | U          |            | u       |     |
|---|------------|------------|---------|-----|
|   | $\alpha$   | $\beta$    |         |     |
|   |            | $\alpha$   | $\beta$ |     |
| 1 | 1/0<br>1,3 | 2/1<br>1/0 |         | 2/1 |
| 2 | 2/1<br>2   | 1/0<br>2/1 |         | 1/0 |
| 3 | 1/0        | 2/1        |         |     |

| Классы | x | U               |                 |
|--------|---|-----------------|-----------------|
|        |   | α               | β               |
| I      | 1 | 1 <sub>I</sub>  | 2 <sub>II</sub> |
|        | 3 | 1 <sub>I</sub>  | 2 <sub>II</sub> |
| II     | 2 | 2 <sub>II</sub> | 1 <sub>I</sub>  |

# Аналитическое задание конечных автоматов

**Достоинства аналитического представления конечных автоматов:**

- **компактность записи по сравнению с табличным, графовым или матричным заданиями;**
- **простота моделирования работы конечных автоматов на ЭВМ;**
- **аналитическое представление необходимо при синтезе структуры автомата, так как при таком задании функции функциональных преобразователей выражаются через элементарные функции, реализуемыми простыми элементами.**

**Для формального описания цифровых управляющих устройств применяется аппарат алгебры логики.**

# Основная функционально полная система

- Включает операции  $\&$ ,  $\vee$  и инверсию

| $x$ | $y$ | $x \& y$ | $x \vee y$ | инв $x$ | инв $y$ |
|-----|-----|----------|------------|---------|---------|
| 0   | 0   | 0        | 0          | 1       | 1       |
| 0   | 1   | 0        | 1          | 1       | 0       |
| 1   | 0   | 0        | 1          | 0       | 1       |
| 1   | 1   | 1        | 1          | 0       | 0       |

- Хаггарт Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техностфера, 2012 – 400 с.

# Нормальные формы

- **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция конечного числа различных членов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию отдельных переменных или их отрицаний, входящих в данный набор не более одного раза  $(xyz) \vee (\bar{x}z) \vee (\bar{y}\bar{z})$
- **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция конечного числа различных членов, каждый из которых представляет собой дизъюнкцию отдельных переменных или их отрицаний, входящих в данный набор не более одного раза  $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$
- **СДНФ** –  $xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$       **СКНФ** –  $(x \vee y)(\bar{x} \vee y)$

# Разложение функций на конститuentы

- *Конституентой единицы* называют конъюнкцию, содержащую все переменные или их инверсии, которая обращается в единицу только при одном выборочном наборе переменных.
- *Конституентой нуля* называют дизъюнкцию, содержащую все переменные или их инверсии, которая обращается в нуль только при одном выборочном наборе переменных.

# Переход от табличного задания функции к аналитическому

## ■ Табличное представление функции

Функция в виде СДНФ:

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   | 1   |
| 0   | 0   | 1   | 0   |
| 0   | 1   | 0   | 1   |
| 0   | 1   | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 0   |
| 1   | 0   | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 0   |
| 1   | 1   | 1   | 1   |

$$f_{\text{СДНФ}} = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \vee \bar{a} b \bar{c} \vee \bar{a} b c \vee a \bar{b} c \vee a b c$$

Функция в виде СКНФ:

$$f_{\text{СКНФ}} = (a \vee b \vee \bar{c}) \cdot (\bar{a} \vee b \vee c) \cdot (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$$

# Вероятностные автоматы

- **Вероятностные (стохастические) автоматы представляют собой конечные автоматы со случайными управлениями, у которых, как правило, учитываются только состояния.**
- **Пример:**
- **модель системы, которая случайным образом может оказаться в одном из технических состояний:**
  - исправное, неисправное, поиск неисправности, ремонт и т.д.

# Марковские цепи с дискретным временем

- **Марковским** называется случайный процесс, состояние которого в очередной момент времени  $t + \Delta t$  зависит только от текущего состояния в момент времени  $t$ .
- **Исходные данные** для определения дискретной марковской цепи:

- множество состояний  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$

- матрица вероятностей переходов

$$P = [p_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- вектор начальных вероятностей

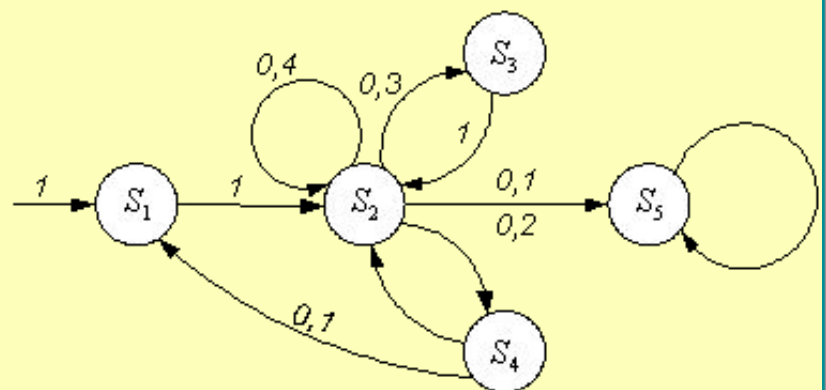
$$p_0 = (p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)})$$

# Марковские цепи с дискретным временем

- Марковская цепь изображается в виде *графа*, вершины которого соответствуют состояниям цепи и дуги – переходам между состояниями
- Пример. Дана матрица вероятностей переходов

Граф:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



- вектор начальных вероятностей

$$p_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

# Анализ марковских цепей

- **Результат анализа марковской цепи:**

- как при известном начальном состоянии от шага к шагу меняются вероятности состояний, в которых может находиться система,
- каковы установившиеся значения этих вероятностей.

$$p_n = \{p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)}\} \quad p_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

- **Для расчета вероятностей используется уравнение Колмогорова-Чепмена**  $p_{n+1} = p_n \cdot P$

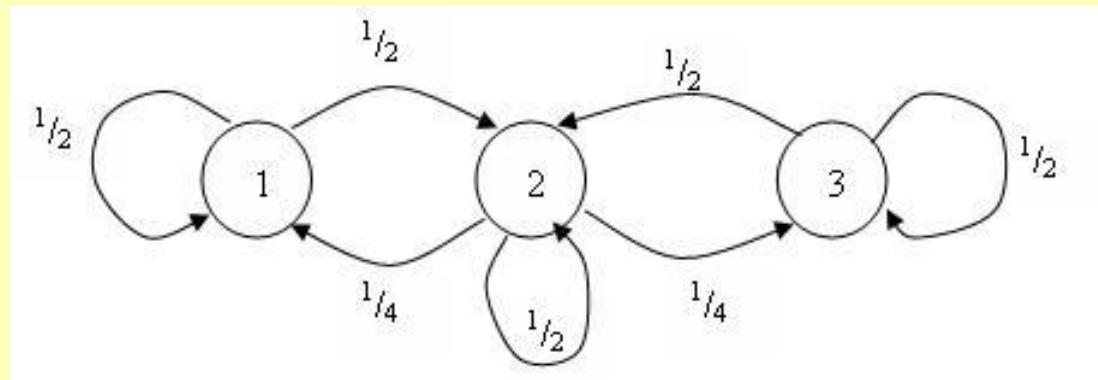
- **вероятности состояний вычисляются рекуррентно:**

$$p_1 = p_0 \cdot P \quad p_2 = p_1 \cdot P = p_0 \cdot P^2 \quad p_3 = p_2 \cdot P = p_0 \cdot P^3$$
$$p_n = p_{n-1} \cdot P = p_0 \cdot P^n$$

- **При  $n \rightarrow \infty$  определяют установившиеся (финальные) вероятности**  $p_{n \rightarrow \infty} = p_{n \rightarrow \infty} \cdot P$

# Анализ марковских цепей. Пример.

- Вероятностный автомат представлен в виде графа



$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

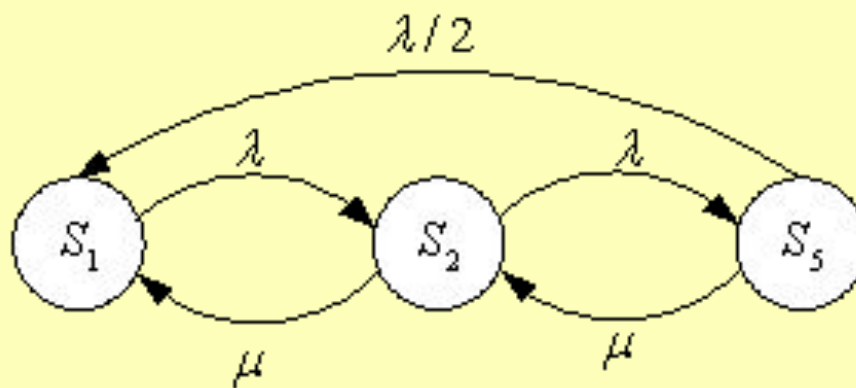
$$p_1 = p_0 \cdot P = (1, 0, 0) \cdot P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$p_2 = p_1 \cdot P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot P = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

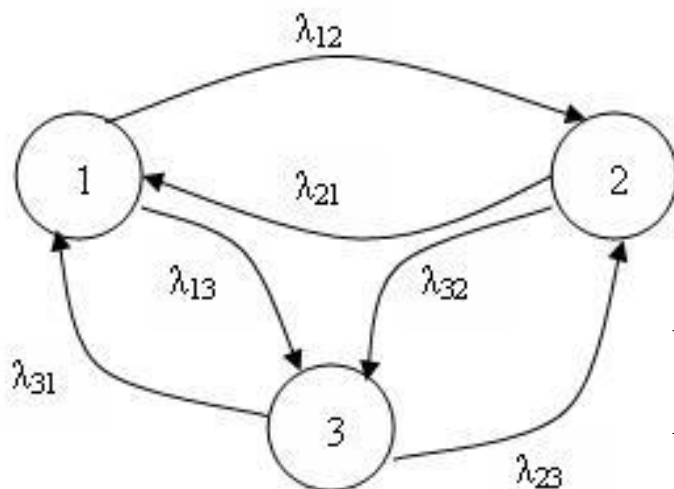
$$\begin{cases} p_1^{(\infty)} = \frac{1}{2} \cdot p_1^{(\infty)} + \frac{1}{4} \cdot p_2^{(\infty)} \\ p_2^{(\infty)} = \frac{1}{2} \cdot p_1^{(\infty)} + \frac{1}{2} \cdot p_2^{(\infty)} + \frac{1}{2} \cdot p_3^{(\infty)} \\ p_3^{(\infty)} = \frac{1}{4} \cdot p_2^{(\infty)} + \frac{1}{2} \cdot p_3^{(\infty)} \end{cases} \quad \begin{aligned} p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} + p_3^{(\infty)} &= 1 \\ p_2^{(\infty)} &= \frac{1}{2} \quad p_1^{(\infty)} = \frac{1}{4} \quad p_3^{(\infty)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

# Марковские процессы

- Главное свойство непрерывного марковского процесса – *экспоненциальность* распределения времени пребывания процесса в каждом из состояний.
- Марковский процесс с непрерывным временем переходов можно задать в виде графа или описать системой дифференциальных уравнений.



# Расчет характеристик марковских процессов



$$\dot{P}_1(t) = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1(t) + \lambda_{21} \cdot P_2(t) + \lambda_{31} \cdot P_3(t)$$

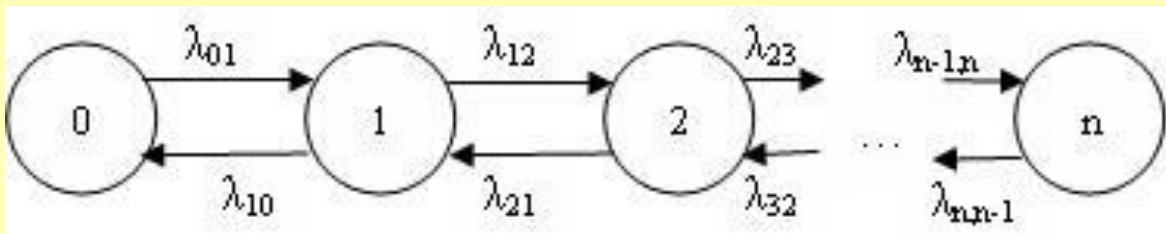
$$\dot{P}_2(t) = \lambda_{12} \cdot P_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot P_2(t) + \lambda_{32} \cdot P_3(t)$$

$$\dot{P}_3(t) = \lambda_{13} \cdot P_1(t) + \lambda_{23} \cdot P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot P_3(t)$$

$$\dot{P}_i(t) = \sum_j \lambda_{ij} \cdot P_j(t) - P_i(t) \sum_j \lambda_{ij}$$

- Для установившегося режима система дифференциальных уравнений преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений, решением которой являются финальные вероятности состояний системы.

# Модель "гибели и размножения"



$$\lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1$$

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})P_1 = \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2 \rightarrow \lambda_{12}P_1 = \lambda_{21}P_2$$

$$\lambda_{n-1,n}P_{n-1} = \lambda_{n,n-1}P_n$$

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} P_{n-1} = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}}$$