

**Комбинаторика, статистика и теория вероятностей на итоговой аттестации выпускников 9 и 11 классов.**



**Казак Вадим Михайлович,  
учитель математики МАОУ  
СОШ №147.**

# ЕГЭ и ГИА

Аттестация за курс основной и средней школы проходит не по алгебре, а по **математике**.

В контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике включены задания по алгебре, геометрии (планиметрия, стереометрия) и вероятности. В КИМ ГИА включены задания по алгебре, геометрии (планиметрия), статистике и теории вероятностей.

В 2011-2012 учебном году варианты КИМ ЕГЭ и ГИА по математике будут составляться с использованием Федерального банка тестовых заданий, опубликованного на сайтах:

[www.mathege.ru](http://www.mathege.ru) и [www.mathgia.ru](http://www.mathgia.ru)

# Задания по теории вероятностей

Задача по данной теме относится к списку заданий, чтобы преодолеть минимальный порог, т.е. минимальный тестовый балл для получения школьного аттестата.

Задания направлены на математические ситуации в повседневной жизни. Такие задачи приходится решать на вокзалах, в банках, в магазинах, при вызове такси и во время ремонта квартиры. Задание является несложным, так как основано на использовании жизненных наблюдений и здравого смысла.

Правильное выполнение такого задания оценивается **одним баллом**.

Примерное время выполнения учащимся задания изменяется от 3 до 10 минут, с учетом уровня изучения математики в данном учебном заведении, знаний и умений самого выпускника и его психологической готовности к сдаче экзамена.

# Учебно-методические пособия

- Вероятность и статистика. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. – М.: Дрофа, 2002-2010.
- Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. пособие для учащихся 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2011.
- Элементы статистики и вероятность: учеб. пособие для 7-9 кл. общеобразоват. Учреждений / М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. – М.: Просвещение, 2011.
- ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. Задания В10. / А.Л. Семенов и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Яценко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012.
- Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Математика. 2012. Учебное пособие. / А.В. Семенов и др.; под ред. И.В. Яценко; МЦНМО. – М.: Интеллект-Центр, 2012. – с. 38-41.

# Учебно-методические пособия

- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В7-В14). Пособие для «чайников». / Е.Г. Коннова и др.; под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012. Элементы теории вероятностей и статистика: учебно-методическое пособие. /Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011.
- Теория вероятностей и статистика /Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008-2010.
- Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО: МИОО, 2011.
- Теория вероятностей и статистика. Контрольные работы и тренировочные задачи. 7-8 классы. /В.В. Бородкина, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2011.
- Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7- 9 классы. /авт.-сост. В.Н. Студенецкая. – Волгоград: Учитель, 2006-2010.

# ***Список тем по теории вероятностей:***

- Понятие о случайном опыте и случайном событии.
- Частота случайного события.
- Вероятности противоположных событий.
- Независимые события.
- Умножение вероятностей.
- Достоверные и невозможные события.
- Равновозможные события и подсчет их вероятности.
- Классическое определение вероятности.

# ***Выпускник должен знать:***

- ⦿ Находить частоту события, используя собственный жизненный опыт и готовые статистические данные.
- ⦿ Находить вероятности случайных событий в простейших случаях.
- ⦿ Решать практико-ориентированные задачи, требующих перебора вариантов.
- ⦿ Уметь сравнивать шансы наступления случайных событий и оценивать вероятности их наступления в практических ситуациях.

# ***Статистика***

***Среднее арифметическое,  
размах, мода –  
статистические  
характеристики.***

# Статистические характеристики:

- ▣ **Средним арифметическим** ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- ▣ **Модой** обычно называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто (**Mo**).

- ▣ **Размах** — это разность наибольшего и наименьшего значений ряда данных.

$$A = x_{\max} - x_{\min}$$

## *Статистические характеристики:*

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

# Задача:

Проведя учёт числа животноводческих ферм в 15 хозяйствах района, получили следующий ряд данных:

1, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 3, 2, 1, 2.

Найдите для этого ряда среднее арифметическое, размах, моду и медиану.

● Среднее арифметическое  $\bar{X} = \frac{1+2+2+3+4+2+3+1+4+5+3+3+2+1+2}{15} = \frac{38}{15} \approx 2,53$

● Мода  $Mo = 2$

● Размах  $A = 5 - 1 = 4$

Упорядочим данные:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, **2**, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5

● Медиана  $Me=2$

# ***Элементы комбинаторики:***

- ⦿ Правило суммы.
- ⦿ Правило произведения.
- ⦿ Перебор возможных вариантов.
- ⦿ Схема- дерево возможных вариантов.
- ⦿ Формулы комбинаторики.

# ***Правило суммы:***

Если элемент А может быть выбран  $m$  способами, а элемент В-  $n$  способами, причём выборы А и В являются взаимно исключающими, то выбор «либо А, либо В» может быть осуществлён  $m+n$  способами.

# Задача

Сколько существует способов выбрать кратное 2 или 3 число из множества чисел: 2,3,4,15,16,20,21,75,28?

## Решение

$m=5$  – кратное 2 (2,4,16,20,28),

$n=4$  –кратное 3 (3,15,21,75).

По правилу суммы находим :

$$m + n = 5 + 4 = 9 \text{ способов.}$$

Ответ: 9 способов.

# ***Правило произведения (правило умножения)***

Если элемент А может быть выбран  $m$  способами, а элемент В –  $n$  способами, то выбор «А и В» может быть осуществлён  $m \cdot n$  способами.

# Задача

На почте продаётся 40 разных конвертов и 25 различных марок. Сколько вариантов покупки конвертов с маркой можно осуществить?

## Решение

Конверт можно выбрать 40 способами, марку – 25 способами. По правилу произведения покупку можно осуществить  $40 \cdot 25 = 1000$  способами.

Ответ: 1000 способов.

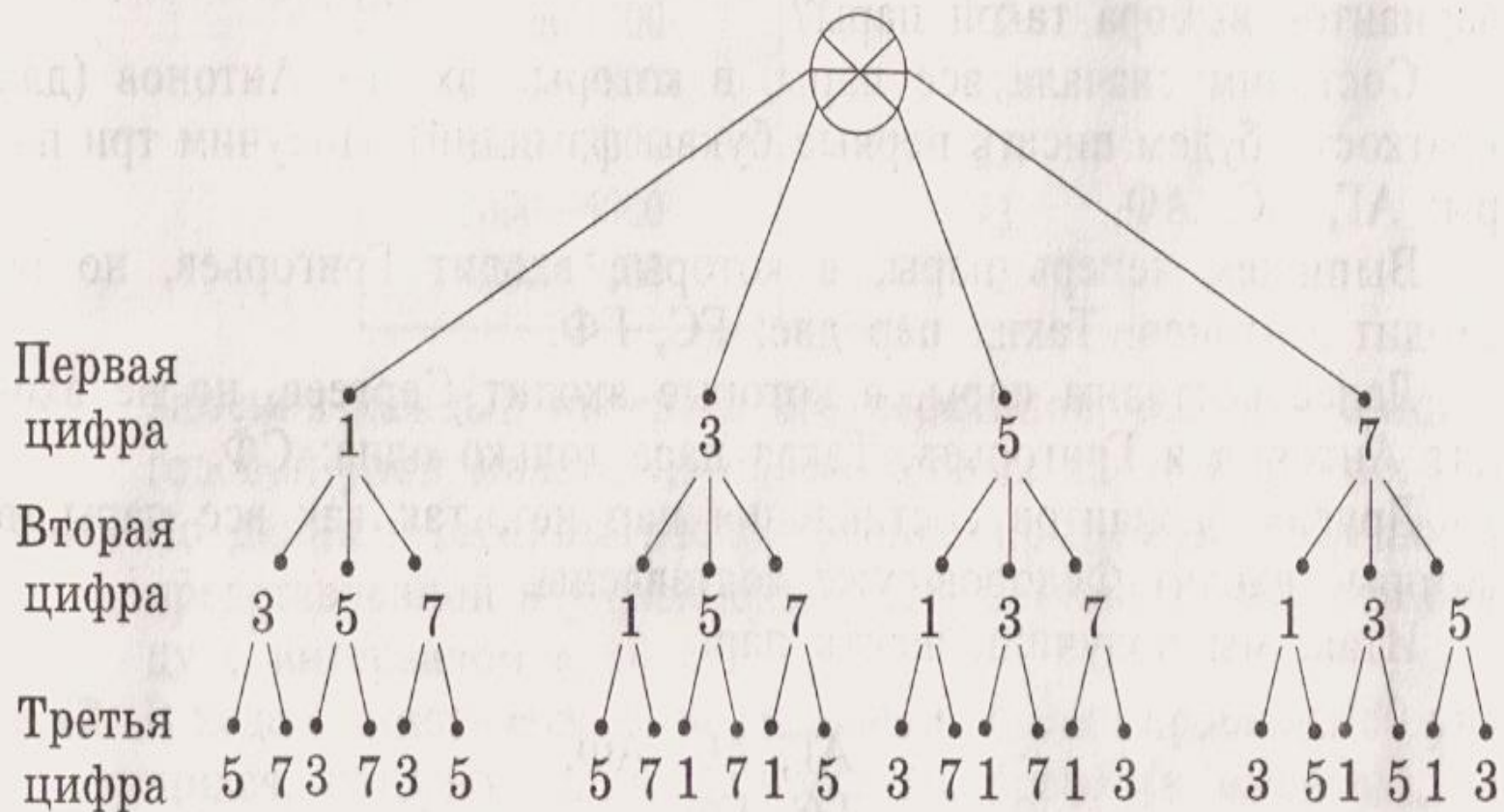
# ***Перебор возможных вариантов***

**Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?**

|            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>135</b> | <b>137</b> | <b>153</b> | <b>157</b> | <b>173</b> | <b>175</b> |
| <b>315</b> | <b>317</b> | <b>351</b> | <b>357</b> | <b>371</b> | <b>375</b> |
| <b>513</b> | <b>517</b> | <b>531</b> | <b>537</b> | <b>571</b> | <b>573</b> |
| <b>713</b> | <b>715</b> | <b>731</b> | <b>735</b> | <b>751</b> | <b>753</b> |

**Ответ: 24 числа**

# Схема– дерево возможных вариантов



# Факториал

Произведение натуральных чисел от 1 до  $n$  в математике называют факториалом числа  $n$  и обозначают  $n!$

$$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * \dots * n$$

Например :

$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$$

# Перестановки

Перестановкой из  $n$  элементов называется комбинация, в которой все эти  $n$  элементов расположены в определенном порядке.

Перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.



$$n = 3$$

$$P = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$$



$$P = n!$$

# Размещения

Размещением из  $n$  элементов по  $k$  называется комбинация, в которой какие-то  $k$  из этих  $n$  элементов расположены в определенном порядке.

Размещения отличаются друг от друга не только порядком расположения элементов, но и тем, какие именно  $k$  элементов выбраны в комбинацию.

# Задача на размещения



○  $n$     ○  $k$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

# Сочетания

*Сочетанием из **n** элементов по **k** называется комбинация, в которой из этих **n** элементов выбраны любые **k** без учета их порядка в комбинации.*

*Таким образом, для сочетания имеет значение только состав выбранных элементов, а не их порядок.*

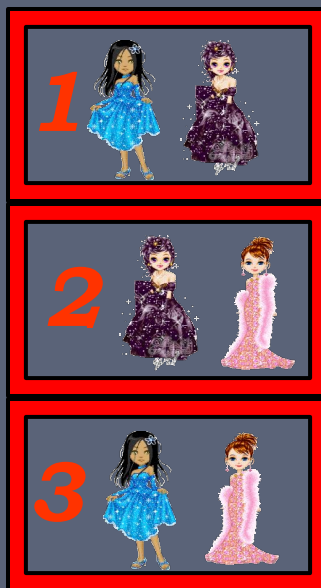
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

# Задача на сочетания



$$\odot \quad n = \odot \quad k =$$
$$3 \quad 2$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{2} = 3$$



# *Различие между перестановками, размещениями, сочетаниями*

- В случае перестановок берутся **все элементы и изменяется только их местоположение.**
- В случае размещений берётся **только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга.**
- В случае сочетаний берётся **только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.**

# Теория вероятности

Если опыт, в котором появляется событие  $A$ , имеет конечное число  $n$  равновозможных исходов, то вероятность события  $A$  равна

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$m$ —число благоприятных исходов,

$n$  - число всех возможных исходов.

# Задачи на теорию вероятностей

По статистике, на каждую 1000 лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить исправную лампочку?

**Решение**

$$P(A) = \frac{1000 - 3}{1000} = 0,997 \text{ или } 99,7 \ \%.$$

# Алгоритм нахождения вероятности события $A$

1. Определить, в чём состоит случайный эксперимент (опыт) и какие у него элементарные события (исход).
2. Найти общее число возможных исходов  $n$ .
3. Определить какие события благоприятствуют интересующему нас событию  $A$  и найти число  $m$ . События можно обозначать любой буквой.
4. Найти вероятность события  $A$  по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



# **Задача №1**

**В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 24 из США, 13 из Мексики, остальные — из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.**

# Решение задачи N°1

- Благоприятное событие **A**: первой выступает спортсменка из Канады.
- Количество всех событий группы: **n**=?  
Соответствует количеству всех гимнасток.  
**n=50**.
- Количество благоприятных событий: **m**=?  
Соответствует количеству гимнасток из Канады. **m=50-(24+13)=13**.

- $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13}{50} = 0,26$$

Ответ: 0,26

## **Задача N°2**

**В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 14 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.**

# Решение задачи N°2

- Благоприятное событие **A**: выбранный насос не подтекает.
- Количество всех событий группы: **n**=?  
Соответствует количеству всех насосов. **n=1400**.
- Количество благоприятных событий: **m**=? Соответствует количеству исправных насосов **m=1400-14=1386**.

- $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1386}{1400} = 0,99$$

Ответ: 0,99

## **Задача №3**

**Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.**

# Решение задачи N°3

- Благоприятное событие **A**: купленная сумка оказалась качественной.
- Количество всех событий группы: **n**=?  
Соответствует количеству всех сумок.  
**n=190+8**.
- Количество благоприятных событий:  
**m**=? Соответствует количеству качественных сумок.**m=190**.
- $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{190}{198} = 0,959... \approx 0,96$  Ответ:0,96

## **Задача N°4**

**В случайном эксперименте  
бросают три игральные кости.  
Найдите вероятность того, что в  
сумме выпадет 7 очков.  
Результат округлите до сотых.**

# Решение задачи №4

- Опыт: выпадают три игральные кости.
- Благоприятное событие **A**: в сумме выпало 7 очков.
- Количество всех событий группы **n**=?

1-я кость - 6 вариантов

2-я кость - 6 вариантов  $n=6*6*6=216$

3-я кость - 6 вариантов

- Количество благоприятных событий **m**=?

331 223 511 412 142

313 232 151 421 214 **m=18**

133 322 115 124 241

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18}{216} \approx 0,08$$

Ответ: 0,08

## ***Задача N°5***

**В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.**

# Решение задачи N°5

- Условие можно трактовать так: какова вероятность того, что все четыре раза выпадет решка?
- Количество всех событий группы  $n=?$ 
  - 1-й раз - 2 варианта
  - 2-й раз - 2 варианта  $n=2*2*2*2=16$
  - 3-й раз - 2 варианта
  - 4-й раз - 2 варианта
- Количество благоприятных событий  $m=?$   $m=1$ .  
Четыре раза выпала решка.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Ответ: 0,0625

## **Задача N°6**

**В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6. Ответ округлите до сотых.**

# Решение задачи N°6

Результат каждого бросания – это пара чисел  $(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  – числа от 1 до 6. Поэтому все поле событий состоит из  $6 \times 6 = 36$  элементов ( $n = 36$ )

|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Благоприятным исходом для рассматриваемого события является любая пара  $(a, b)$ , для которой  $a + b = 6$ .

Это можно сделать пятью следующими способами:

$$6 = 1 + 5$$

$$6 = 2 + 4$$

$$6 = 3 + 3$$

$$6 = 4 + 2$$

$$6 = 5 + 1$$

$$(m = 5)$$

Таким образом, вероятность заданного события равна  
 $P = m/n = 5/36 = 0,14$

## **Задача №7**

**Люда дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало 5 очков.**

# Решение задачи N°7

| Первое бросание |   | Второе бросание |   | Сумма очков |
|-----------------|---|-----------------|---|-------------|
| 3               | + | 6               | = | 9           |
| 4               | + | 5               | = | 9           |
| 5               | + | 4               | = | 9           |
| 6               | + | 3               | = | 9           |

Равновозможных исходов – 4

Благоприятствующих исходов – 2

Вероятность события  $p = 2/4 = 0,5$

## **Задача N°8**

Наташа и Вика играют в кости. Они бросают игральную кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что Наташа выиграла.

# Решение задачи N°8

| Наташа |   | Вика |   | Сумма очков |
|--------|---|------|---|-------------|
| 2      | + | 6    | = | 8           |
| 3      | + | 5    | = | 8           |
| 4      | + | 4    | = | 8           |
| 5      | + | 3    | = | 8           |
| 6      | + | 2    | = | 8           |

Равновозможных исходов – 5

Благоприятствующих исходов – 2

Вероятность события  $p = 2/5 = 0,4$

## **Задача N°9**

**Миша трижды бросает игральный кубик. Какова вероятность того, что все три раза выпадут чётные числа?**

# Решение задачи N°9

- У Миши равновозможных исходов –

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

- Благоприятствующих проигрышу исходов –

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

- Вероятность события

$$p = 27/216 = 1/8 = 0,125$$

Ответ: 0,125.

## ***Задача №10***

**В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 16 очков. Результат округлите до сотых**

# Решение задачи N°10

| Первая |   | Вторая |   | Третья |   | Сумма очков |
|--------|---|--------|---|--------|---|-------------|
| 4      | + | 6      | + | 6      | = | 16          |
| 6      | + | 4      | + | 6      | = | 16          |
| 6      | + | 6      | + | 4      | = | 16          |
| 5      | + | 5      | + | 6      | = | 16          |
| 5      | + | 6      | + | 5      | = | 16          |
| 6      | + | 5      | + | 5      | = | 16          |

Равновозможных исходов

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Благоприятствующих исходов – 6

Вероятность события  $p = 6/216 = 1/36 = 0,277... = 0,28$



# Задача №1

В урне лежат одинаковые шары : **5 белых, 3 красных и 2 зелёных**. Саша вынимает один шар. Найдите вероятность того, что он окажется зелёным.

## Решение

Всего в урне лежит  **$5+3+2=10$**  шаров, из них **2** – зелёных. Вероятность того, что вынутый шар окажется зелёным, равна  **$2:10=0,2$** .

**Ответ: 0,2**

## Задача N°2

В копилке находятся монеты достоинством 2 рубля – 14 штук, 5 рублей – 10 штук и 10 рублей – 6 штук. Какова вероятность того, что первая монета, выпавшая из копилки, будет достоинством 10 рублей?

### Решение

Всего в копилке  $14+10+6=30$  монет, из них 6 штук – десятирублевых. Вероятность того, что первая монета, выпавшая из копилки, будет достоинством 10 рублей, равна  $6:30=1:5=0,2$ .

Ответ: 0,2

# Задача №3

Подбрасывают две монеты. Какова вероятность того, что все монеты упадут орлом вверх?

## Решение

Рассмотрим полную группу событий.

- ♦ первая монета упала орлом (o), вторая — решкой (p);
- ♦ обе монеты упали орлом;
- ♦ первая монета упала решкой, вторая — орлом;
- ♦ обе монеты упали решкой.

Мы перечислили все возможные исходы опыта, их всего — 4.

Нас интересуют те исходы опыта, когда обе монеты упали орлом. Такой случай всего один. Стало быть,

$$N = 1.$$

Итак, вероятность выпадения двух орлов:  $P = 1/4$ .

**Ответ: 0,25**

# Задача N°4

Подбрасывают две монеты. Какова вероятность того, что ровно одна монета упадёт орлом вверх?

## Решение

Рассмотрим полную группу событий.

- ♦ первая монета упала орлом (o), вторая — решкой (p);
- ♦ обе монеты упали орлом;
- ♦ первая монета упала решкой, вторая — орлом;
- ♦ обе монеты упали решкой.

Мы перечислили все возможные исходы опыта, их всего — 4.

Нас интересуют те исходы опыта, когда одна из монет упала орлом. Вверх. Таких случаев два. Стало быть,  $N = 2$ .

Итак, вероятность выпадения «орла»:

$$P = 2/4 = 1/2$$

Ответ: 0,5

# Задача N°5

Паша наудачу выбирает двузначное число.  
Найдите вероятность того, что оно оканчивается на 7.

**Решение**

Всего двузначных чисел – **90**.

Двузначных чисел, оканчивающихся на **7**:

**17,27,37,47,57,67,77,87,97 – 9 чисел.**

Вероятность того, что наугад выбранное двузначное число оканчивается на 7, равна:

$$\mathbf{9:90=0,1}$$

**Ответ: 0,1**

## Задача N°6

На экзамене 45 билетов, Антон не успел выучить 18 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет, если билет берётся наудачу.

### Решение

Всего **45** билетов. Антон выучил  **$45 - 18 = 27$**  билетов. Вероятность того, что ему попадётся выученный билет,  **$27 : 45 = 0,6$**  равна.

**Ответ: 0,6**

# Задача №7

На столе лежат 7 синих, 3 красных и 5 зелёных ручек. Найдите вероятность того, что наугад взятая ручка окажется красной.

## Решение

Всего на столе  $7+3+5=15$  ручек, из 3 – красных. Вероятность того, что наугад взятая ручка окажется красной, равна  $3:15=0,2$ .

Ответ: 0,2

# Задача N°8

В тестовом задании пять вариантов ответа, из которых только один верный. Какова вероятность правильно решить задание, если выбирать вариант наугад?

## Решение

Если в тестовом задании только один из пяти ответов верный, то вероятность правильно решить задание, если выбирать вариант наугад, равна  $1:5=0,2$ .

Ответ: 0,2.

# Задача № 9

В мешке находятся **2 чёрных** и **3 белых** шара. Наугад вытаскивают два шара. Какова вероятность того, что вытасканные шары будут одного цвета?

## Решение

Всего в мешке **5 шаров**. Вероятность того, что вытасканные два шара будут одного цвета, равна  **$2:5=0,4$** .

**Ответ: 0,4.**

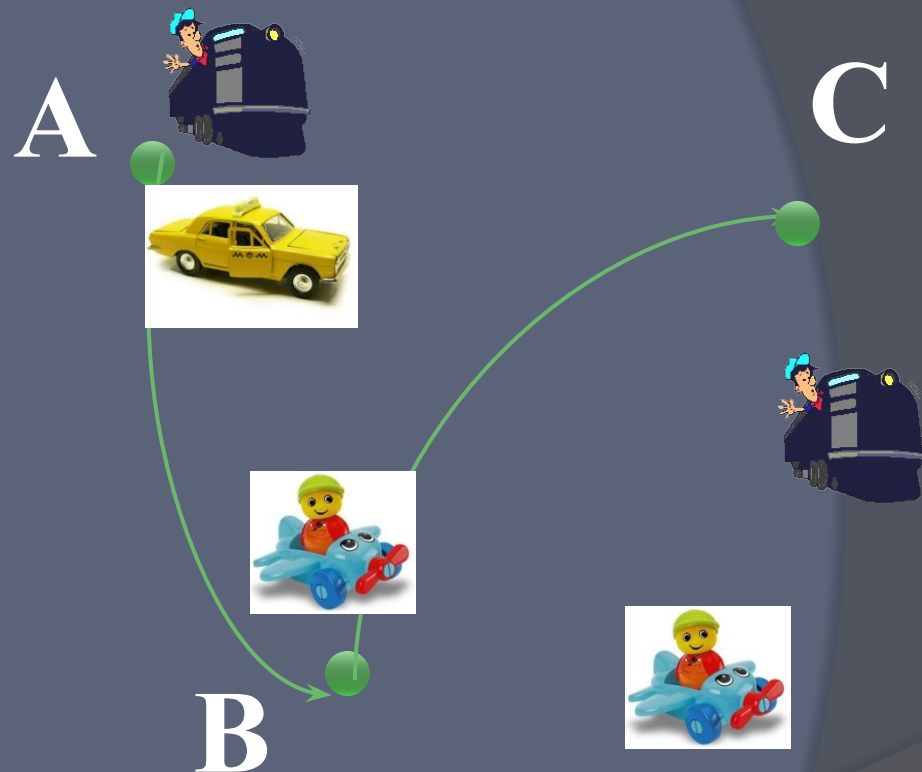
# **Задача №10**

Из города А в город В можно добраться поездом, самолётом и на автомобиле. Из города В в город С можно добраться только поездом и самолётом. Пассажир выбирает для себя транспорт случайным образом. Какова вероятность того, что этот пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом?

# Решение задачи N°10

По правилу произведения получаем, что добраться из города А в город С через город В можно  $3 \cdot 2 = 6$  способами. Вероятность того, что пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом, равна  $1:6$ .

Ответ:  $1/6$ .



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**  
**УДАЧИ НА ЕГЭ !!!**  
**УДАЧИ НА ГИА !!!**

