

Теория графов

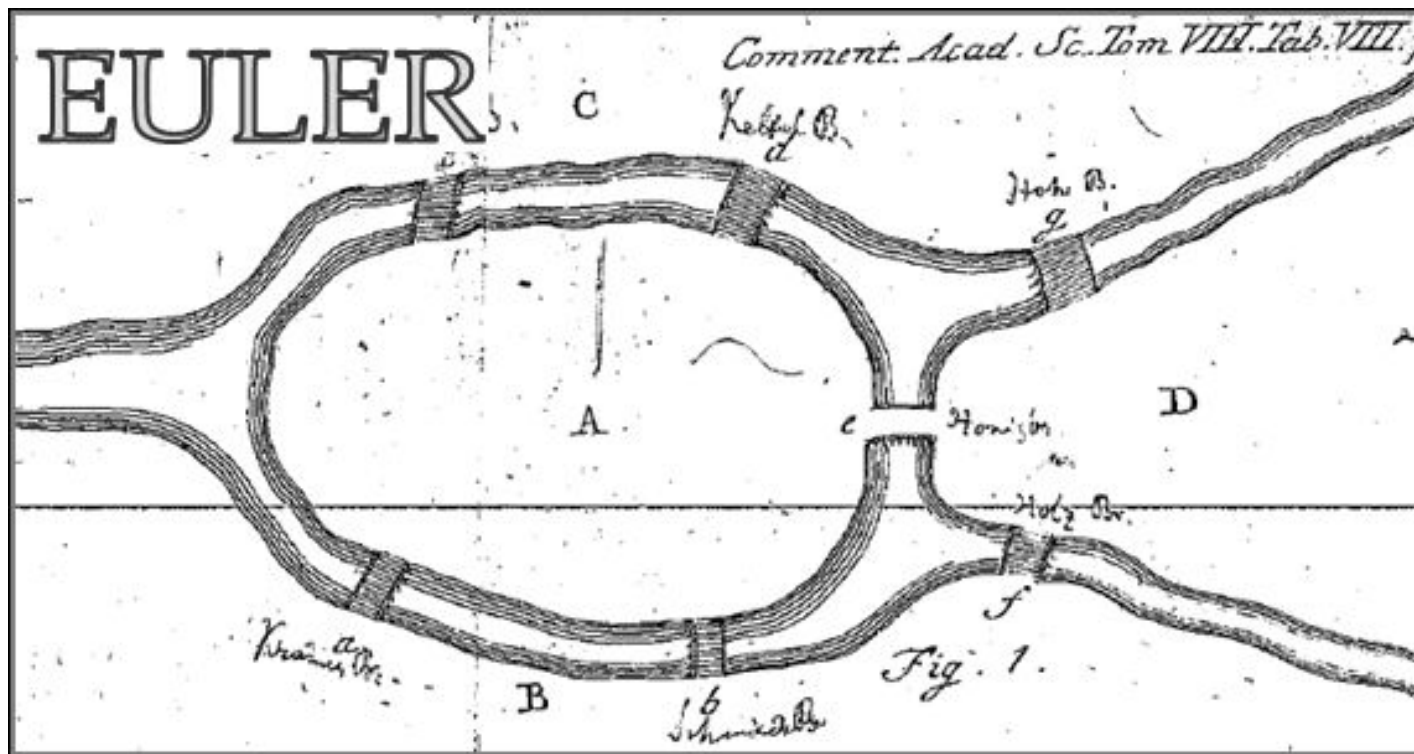
Лекция 1

Литература

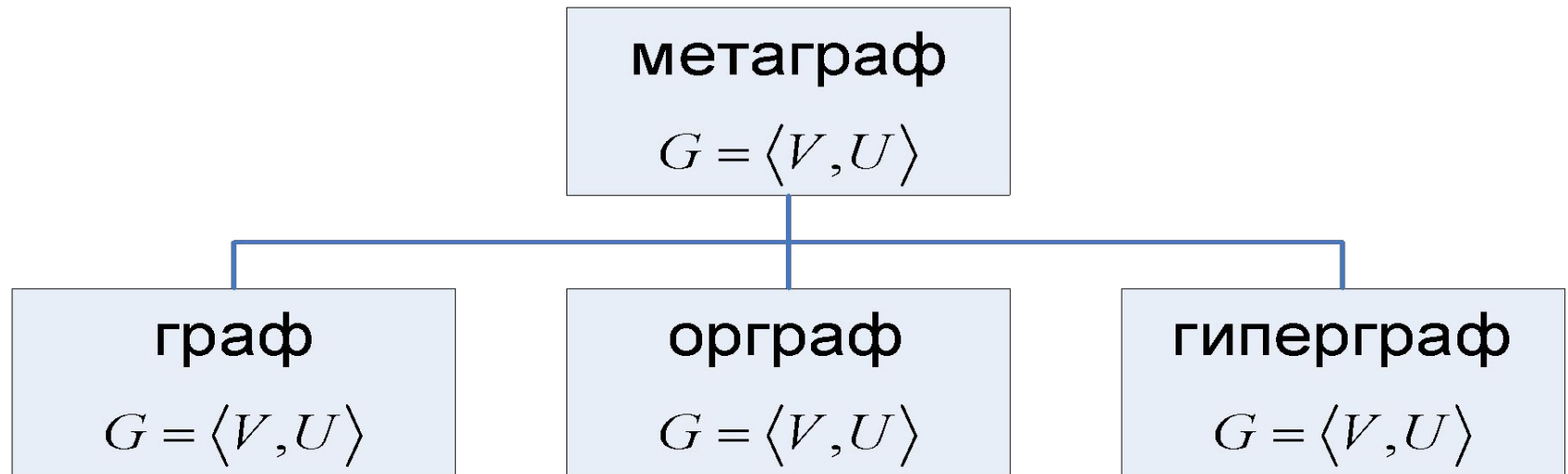
1. В.А. Горбатов Дискретная математика М.: АСТ; Астрель, 2003
2. Харари Ф. Теория графов, 2003г
3. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход. 1978
4. Кузнецов О.П., Дискретная математика для инженера, 2009.
5. Тихомирова А.Н. Теория графов, МИФИ,

Задача о Кёнигсбергских мостах

Леонард Эйлер(1707-1783)



Основные объекты графов



- носитель метаграфа (конечное множество вершин). $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$
- сигнатура метаграфа (конечное множество связей между вершинами). $U = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$

Понятие графа и орграфа

Граф $G = \langle V, U \rangle$, где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 1$ —

множество вершин (носитель),

$U \subseteq V \times V$ (сигнатура).

Неориентированный граф (граф)

$$G = \langle V, U \rangle,$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1,$$

$$U \subseteq V \times V$$

$$(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$$

(v_i, v_j) – ребро графа

(v_i, v_i) - петля

Ориентированный граф (орграф)

$$G = \langle V, U \rangle,$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1$$

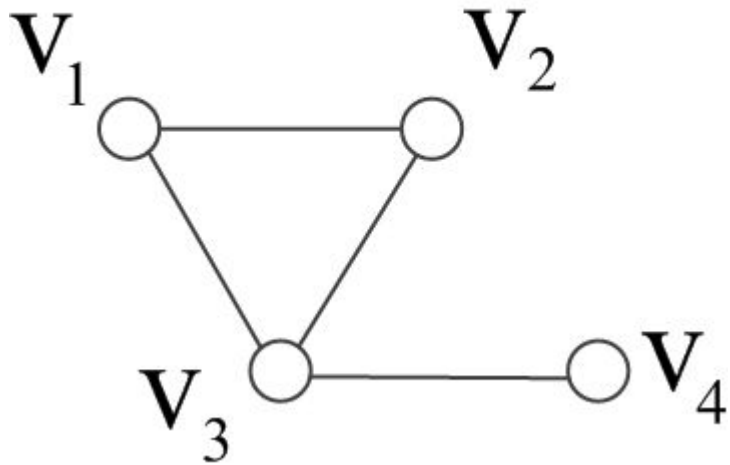
$$U \subseteq V \times V$$

$$(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$$

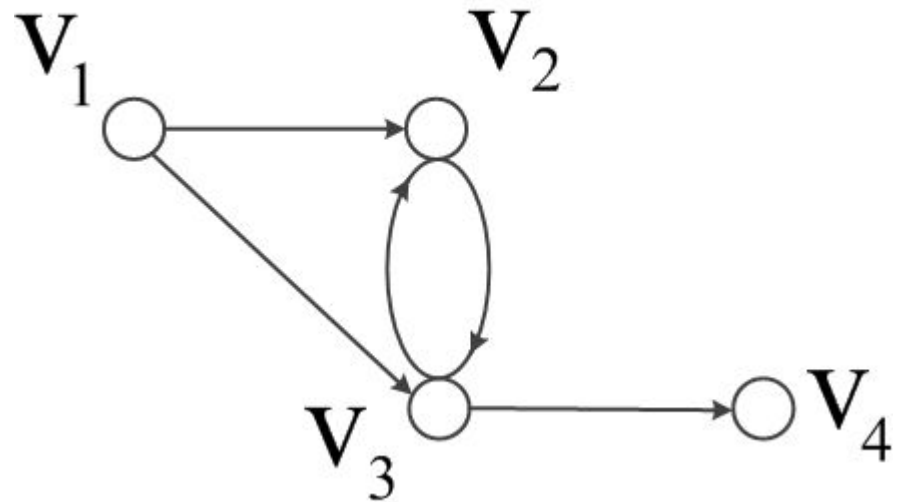
(v_i, v_j) - дуга

Геометрический граф

Граф



Орграф



Обозначение

$$G_{p,q} \quad |V| = p, \quad |U| = q$$

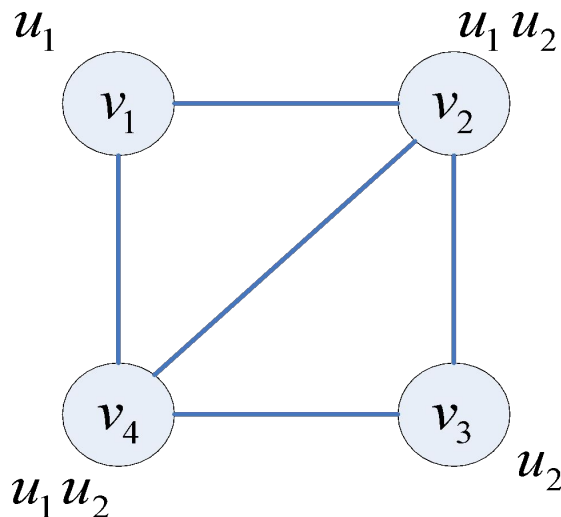
$G_{1,0}$ - тривиальный граф

типы метаграфов

ГИПЕРГРАФ (модельный граф)

Сигнатура (U) - множество граней, каждая из которых связывает некоторое подмножество вершин. **Грань** — подмножество вершин гиперграфа

$$u \in U \rightarrow u \subseteq V$$



$$G = \langle V, U \rangle$$

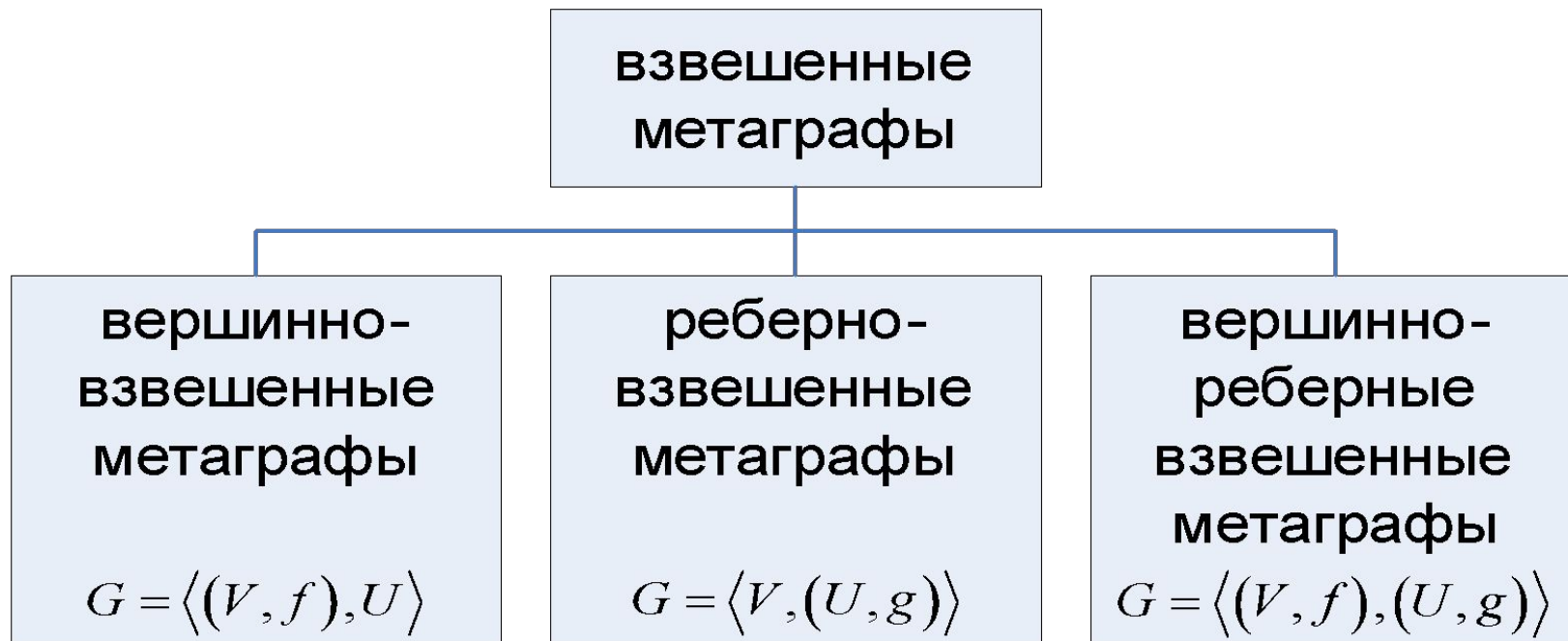
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$U = \{u_1, u_2\}$$

$$u_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$u_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$$

взвешенные метаграфы



$f: V \rightarrow N$ - весовая функция для носителя (вершин)

$g: U \rightarrow K$ - весовая функция для сигнатуры (ребер или дуг)

N, K – некоторые множества (весовые характеристики)

Локальная структура графа

$(v_i, v_j) \in U$ — v_i и v_j — смежны

$u_k = (v_i, v_j)$ — u_k инцидентно v_i ,

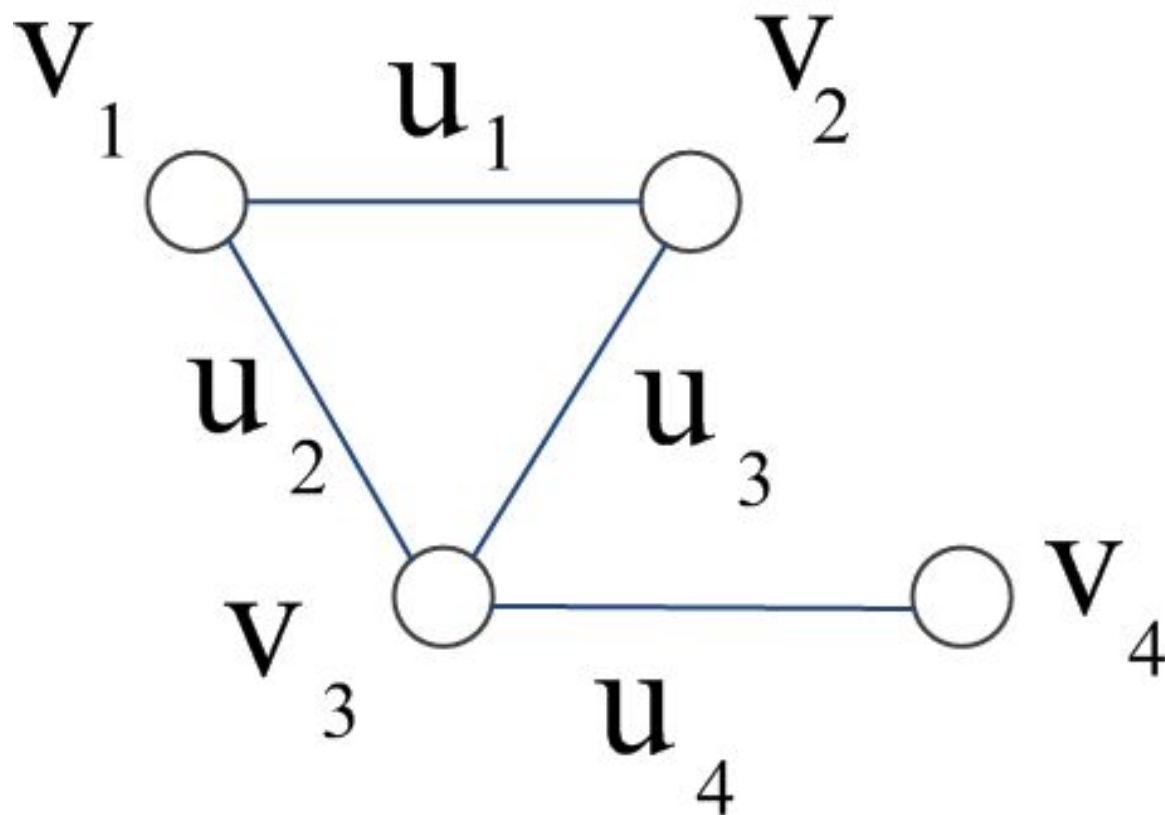
u_k инцидентно v_j , v_i инцидентно u_k

v_j инцидентно u_k

$u_k = (v_i, v_j)$, $u_n = (v_i, v_m)$ —

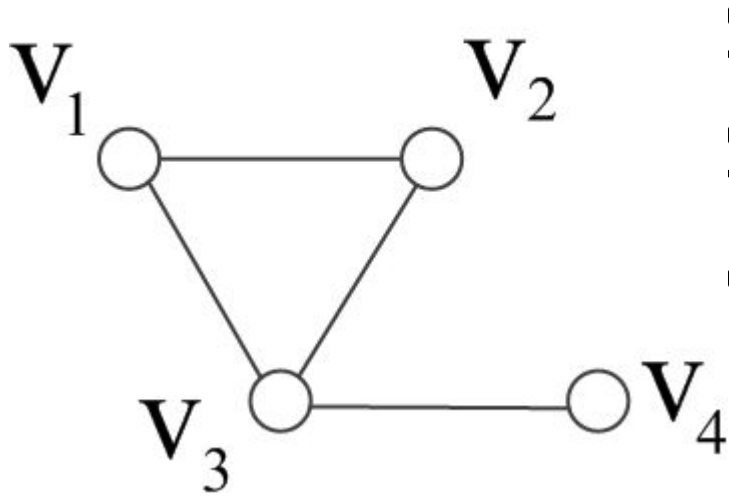
u_k и u_n — смежны

Пример



Степень вершины

Степень вершины ($d(v_i)$) – число рёбер, инцидентных вершине



Теорема

В любом конечном графе
число вершин нечётной
степени чётно.

Свойства степеней графа

$G_{p,q}$

$$\sum_{i=1}^p d(v_i) = 2q$$

Степень графа

Степень графа (максимальная степень вершины)

$$\Delta(G) = \max_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$$

Минимальная степень вершины графа

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$$

Локальная структура ориентированного графа

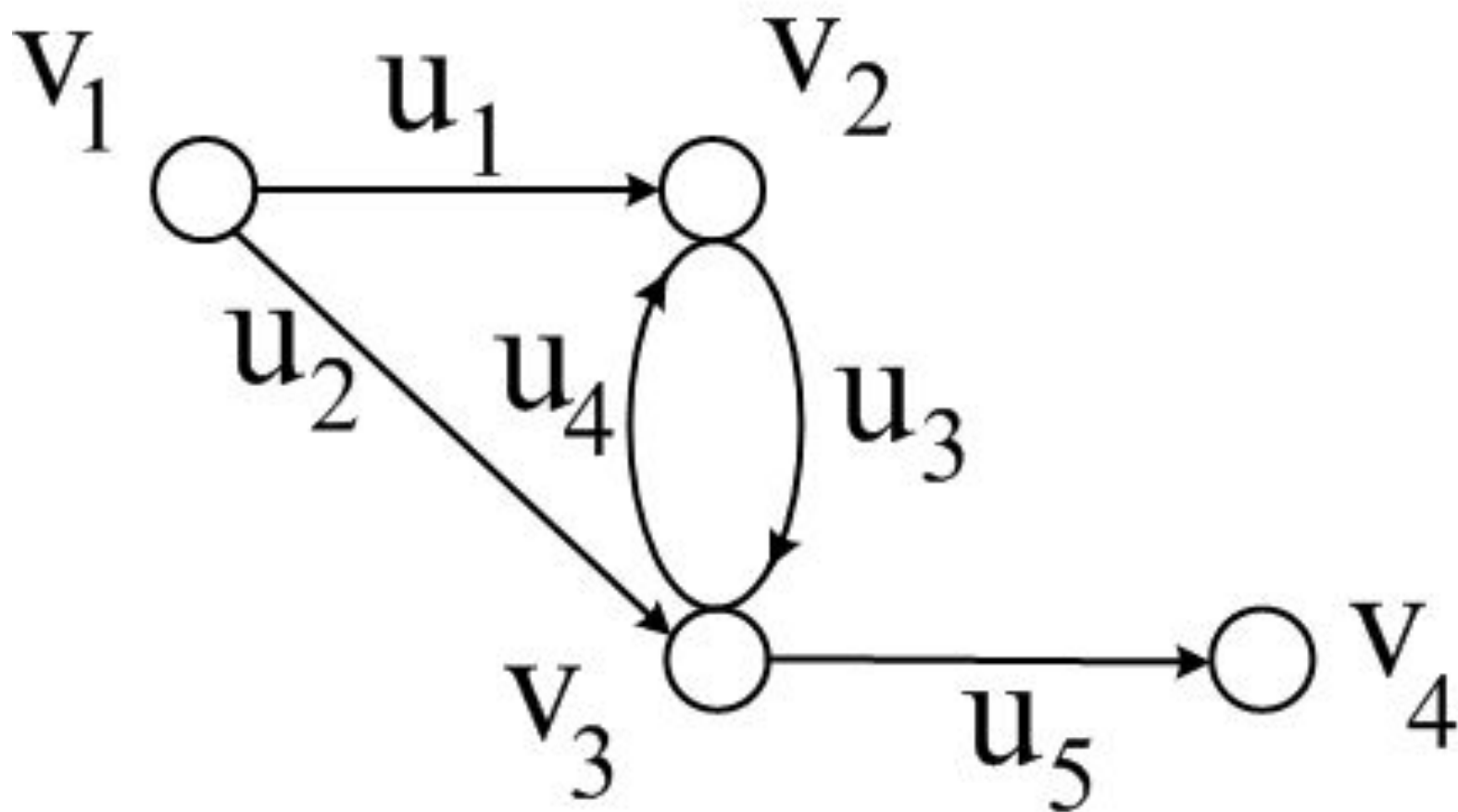
$u_k = (v_i, v_j)$ – дуга u_k положительно
инцидентна v_i ,

дуга u_k отрицательно инцидентна v_j ,

$u_k = (v_i, v_j)$, $u_n = (v_i, v_m)$ –

u_k и u_n – смежны

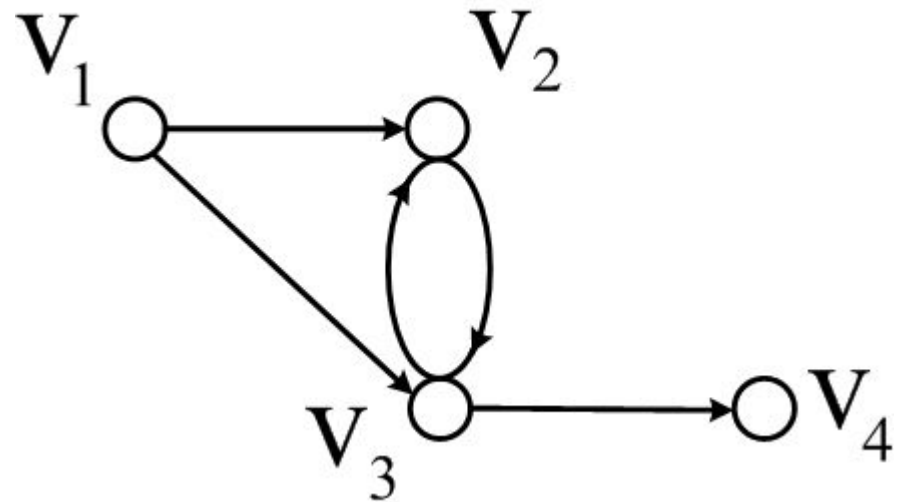
Пример



Степени вершин в орграфе

$d^+(v_i)$ — число
положительно
инцидентных дуг
вершины v_i .

$d^-(v_i)$ — число
отрицательно
инцидентных дуг
вершины v_i .



$$d^+(v_1) = 2, d^-(v_1) = 0;$$
$$d^+(v_2) = 1, d^-(v_2) = 2.$$

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)$$

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

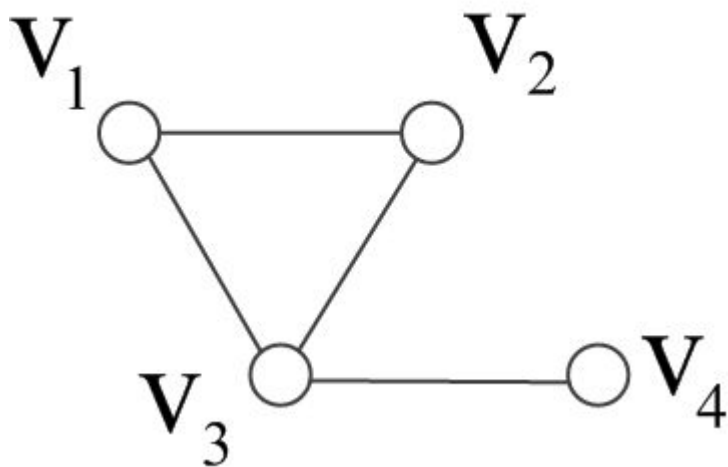
$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) + d^-(v_i)) = 2q$$

Матричное представление графа

Матрица смежности A :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in U \\ 0, & (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



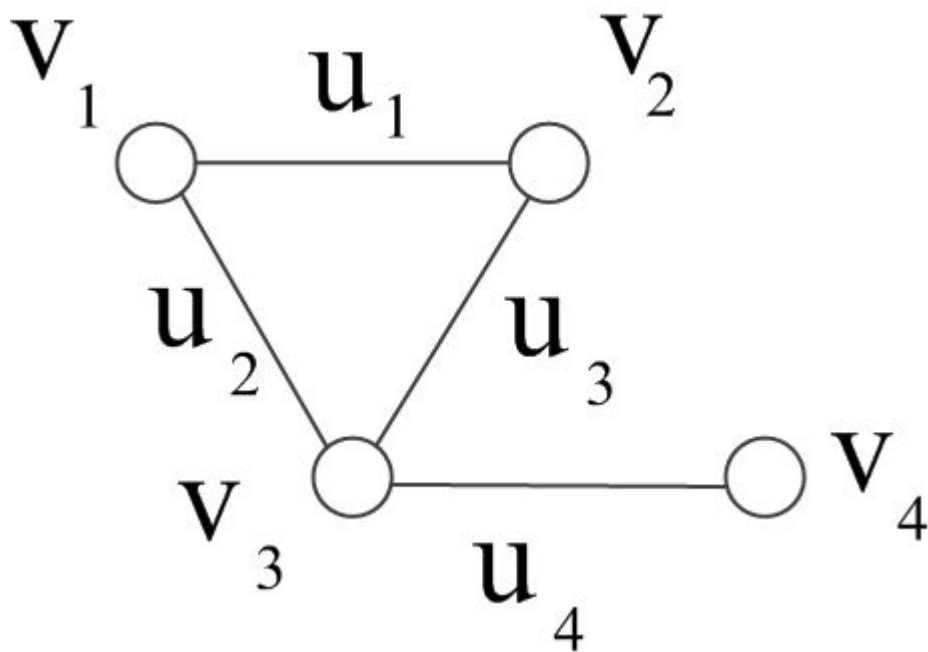
$A =$

0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
0	0	1	0

Матрица инцидентности В

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ инцидентно } u_j \\ 0, & v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



B=

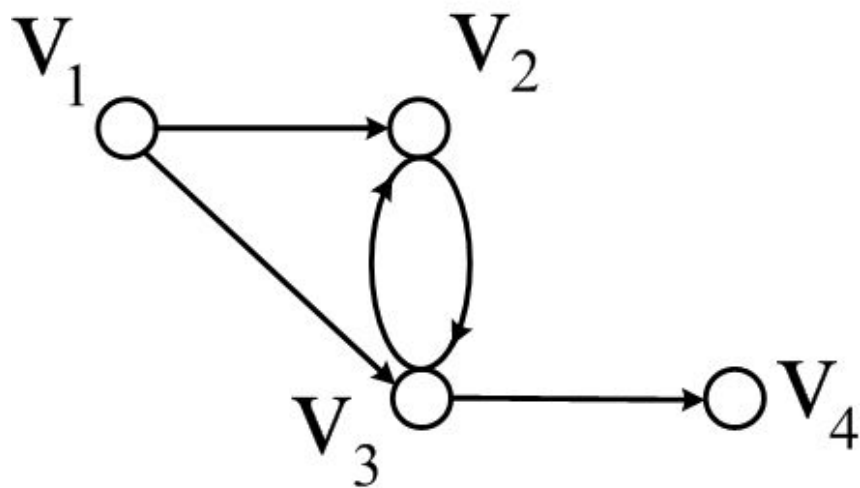
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Матрица смежности орграфа

A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in U \\ 0, & (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



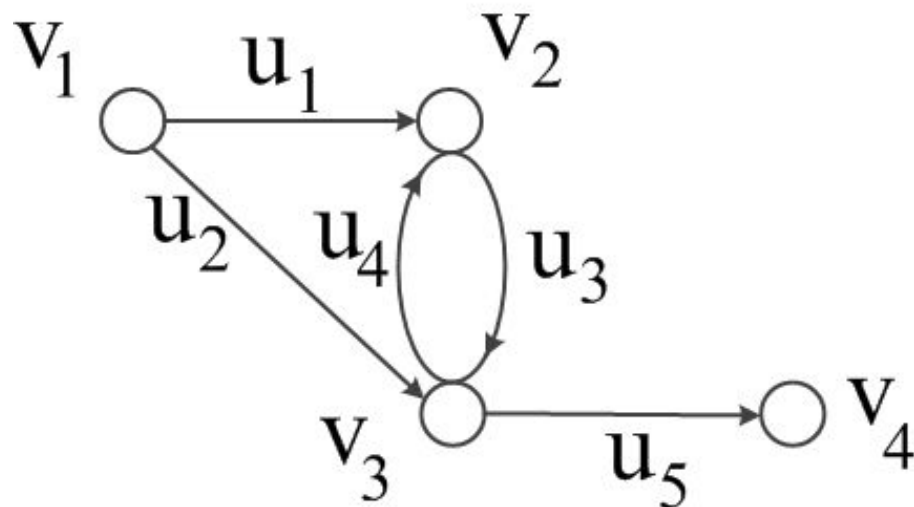
$A =$

0	1	1	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

Матрица инцидентности В

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, u_j = (v_i, v_k) \\ -1, u_j = (v_k, v_i) \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



B=

1	1	0	0	0
-1	0	1	-1	0
0	-1	-1	1	1
0	0	0	0	-1

Функциональный способ задания графов

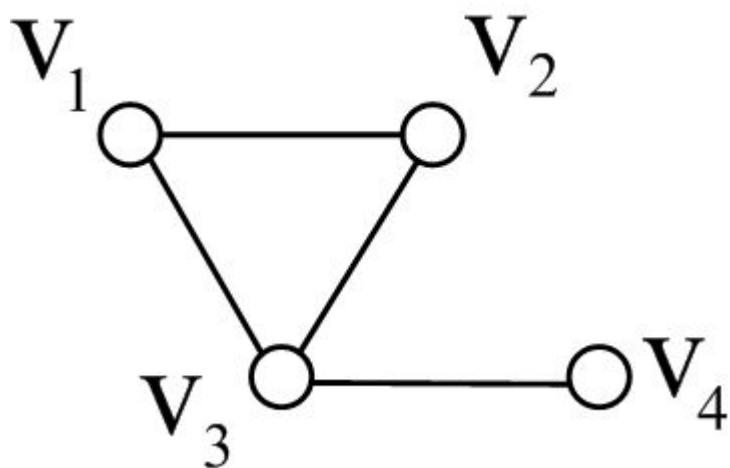
$$G = \langle V, \Gamma \rangle$$

Γ - функция окрестности вершин

$$\Gamma: V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma(v) = \{v_i \mid v_i \text{ смежна с } v\}$$

Пример



$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\}$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\}$$

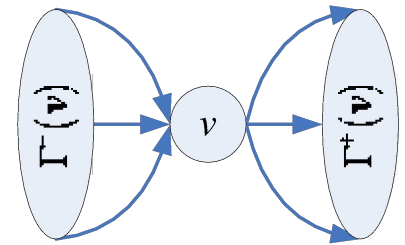
$$\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$\Gamma(v_4) = \{v_3\}$$

Функциональный способ задания орграфов

$$G = \langle V, \Gamma^+ \rangle \quad G = \langle V, \Gamma^- \rangle$$

Γ^+ , Γ^- - функции положительной и отрицательной полуокрестности вершины, соответственно



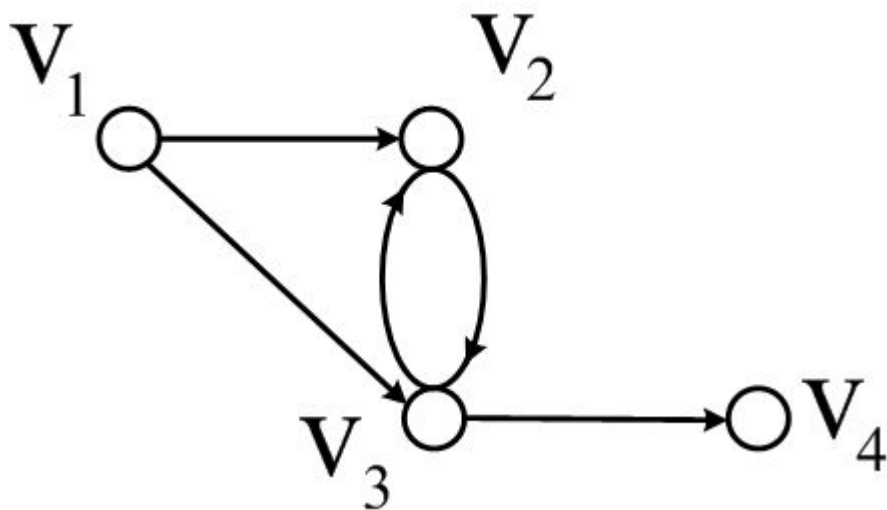
$$\Gamma^+ : V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^+(v) = \{v_i \mid (v, v_i) \in U\}$$

$$\Gamma^- : V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^-(v) = \{v_i \mid (v_i, v) \in U\}$$

Пример



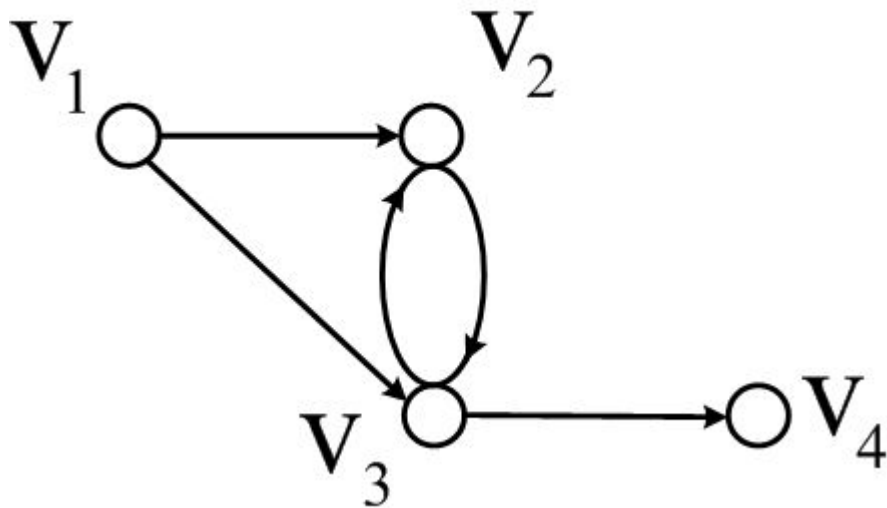
$$\Gamma(v_1)^+ = \{v_2, v_3\}$$

$$\Gamma(v_2)^+ = \{v_3\}$$

$$\Gamma(v_3)^+ = \{v_2, v_4\}$$

$$\Gamma(v_4)^+ = \emptyset$$

Пример



$$\Gamma(v_1)^- = \emptyset$$

$$\Gamma(v_2)^- = \{v_1, v_3\}$$

$$\Gamma(v_3)^- = \{v_1, v_2\}$$

$$\Gamma(v_4)^- = \{v_3\}$$

Изоморфизм графов

Графы изоморфны, если
существует взаимно однозначное
соответствие между
множествами вершин,
сохраняющее отношение
смежности

Функциональное задание изоморфизма графов

Два графа $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$ и $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$ **изоморфны**, если существует взаимно однозначная функция

$h: V_a \rightarrow V_b$ такая, что:

1) если $(v_{a1}, v_{a2}) \in U_a$, то $(h(v_{a1}), h(v_{a2})) \in U_b$;

2) если $(v_{b1}, v_{b2}) \in U_b$, то $(h^{-1}(v_{b1}), h^{-1}(v_{b2})) \in U_a$.

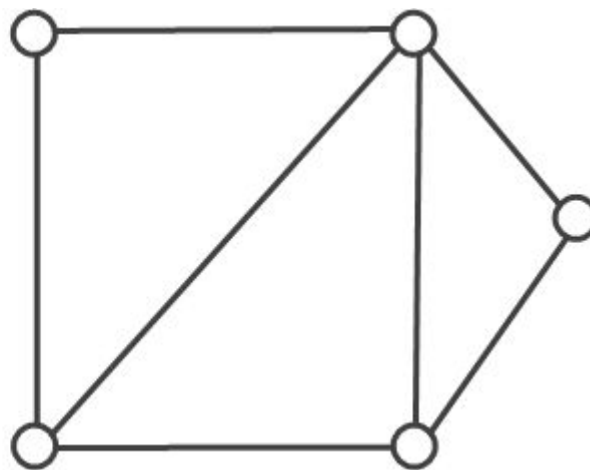
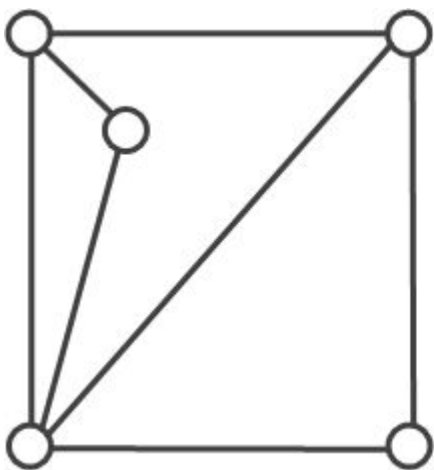
Свойства изоморфизма

Отношение

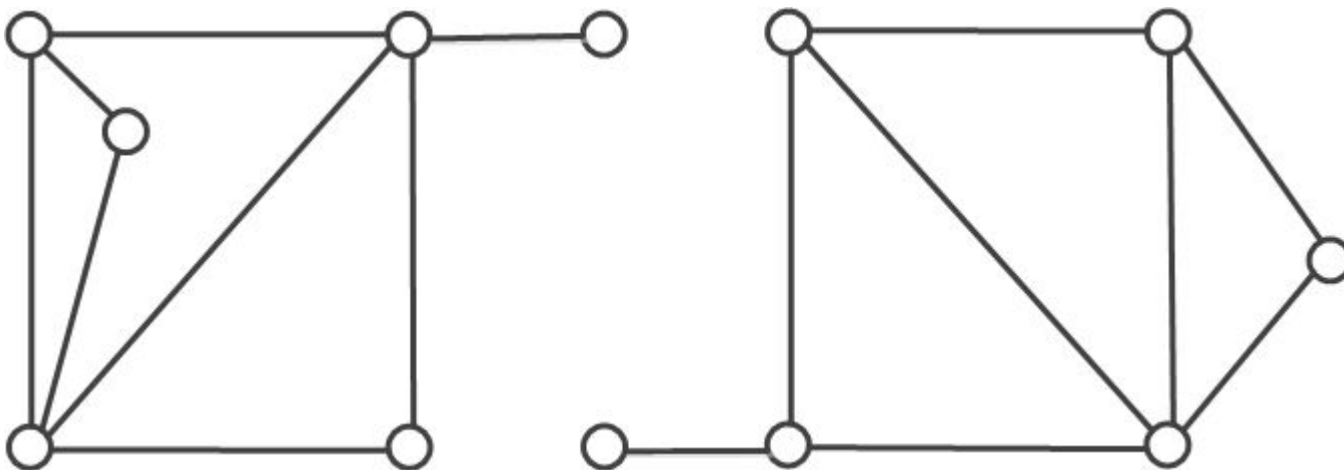
- рефлексивно
- симметрично
- транзитивно

Эквивалентность

Пример изоморфных графов



Пример не изоморфных графов



Инварианты графа

Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется **ИНВАРИАНТОМ**

Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точностью до изоморфизма — основная задача теории графов
(полная система инвариантов ещё не найдена)

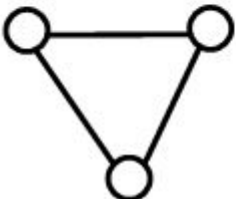
Полный граф K_n

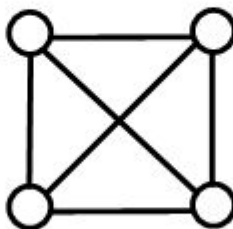
Граф полный, если каждая вершина смежна с каждой.

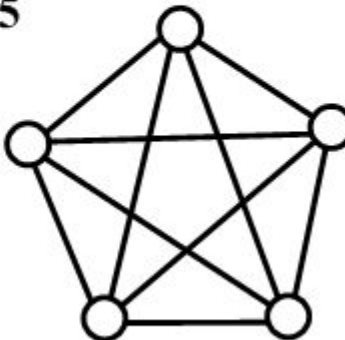
Полный граф с n вершинами - K_n

K_1 

K_2 

K_3 

K_4 

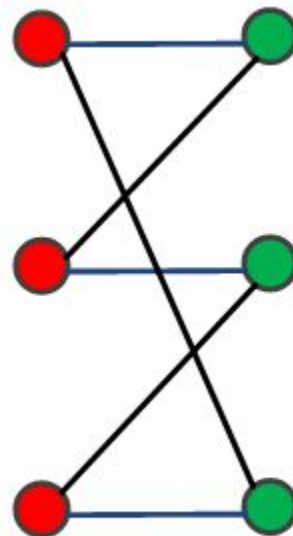
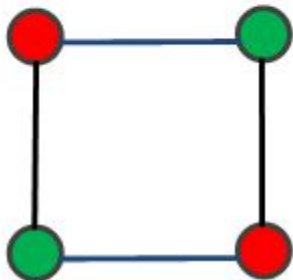
K_5 

Двудольный граф

Граф двудольный, если множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, в каждом из которых никакая пара вершин не смежна.

$$G = \langle V, U \rangle, \quad V = V_1 \cup V_2, \\ V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad U \subseteq V_1 \times V_2$$

Двудольные графы. Примеры



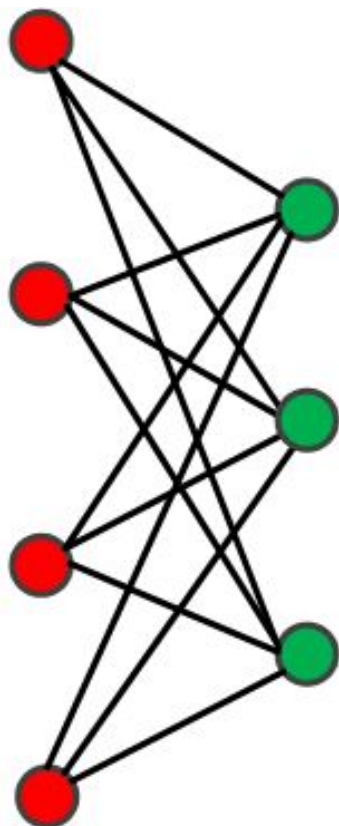
Полный двудольный граф $K_{m,n}$

$K_{m,n}$ - граф двудольный и каждая вершина из множества V_1 смежна с каждой вершиной из V_2 , $|V_1|=m$, $|V_2|=n$.

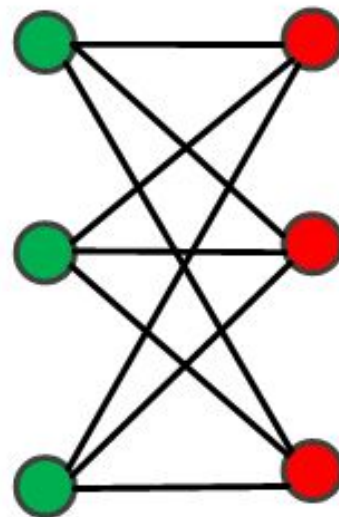
$$G = \langle V, U \rangle, \quad V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \\ U = V_1 \times V_2$$

Полные двудольные графы $K_{m,n}$

$K_{4,3}$



$K_{3,3}$

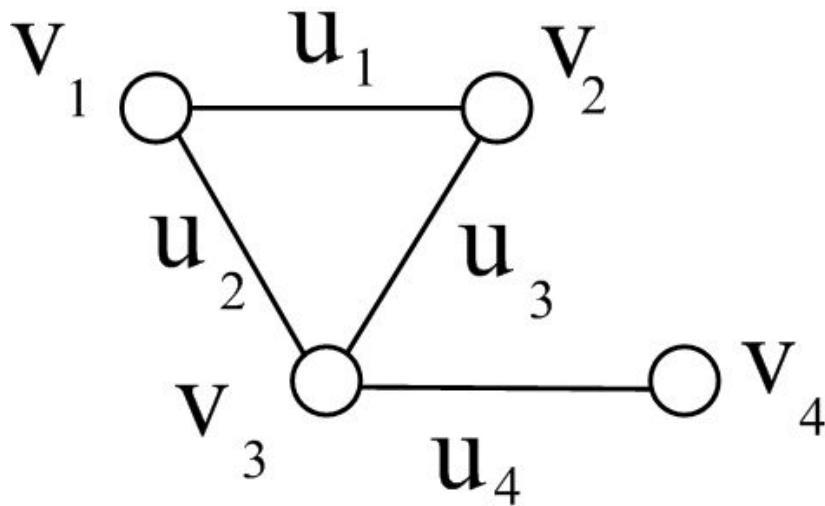


Операции над графами

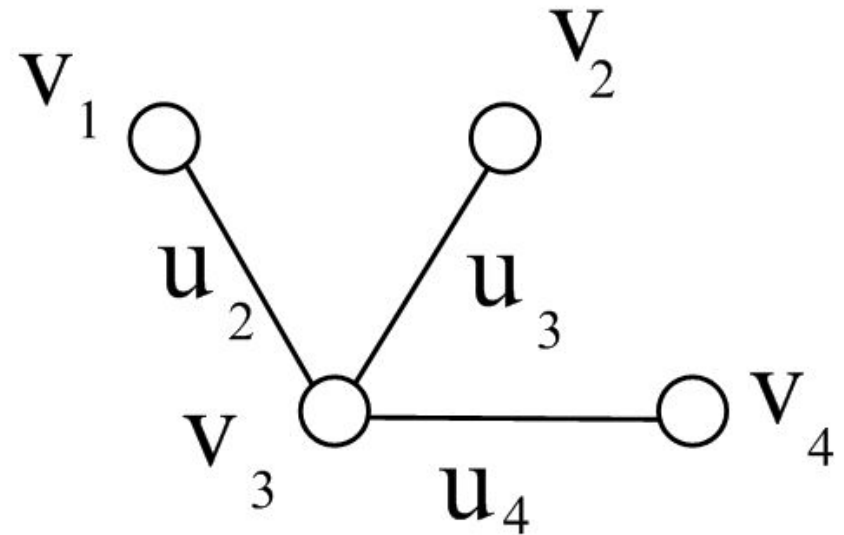
Удаление ребра

$$G = \langle V, U \rangle, G \setminus u = \langle V, U \setminus \{u\} \rangle$$

G



$G \setminus u_1$

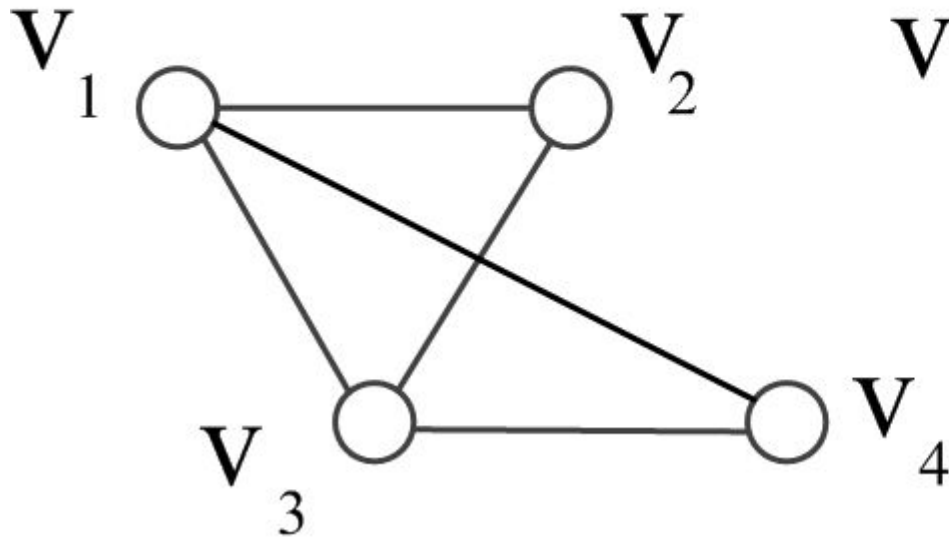


Удаление вершины

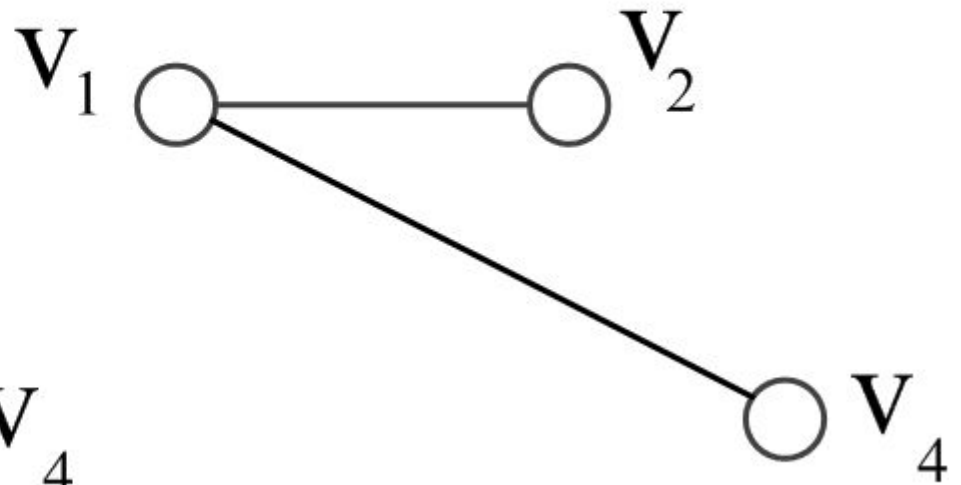
$$G = \langle V, U \rangle, G \setminus v = \langle V', U' \rangle$$

$$V' = V \setminus \{v\}, U' = U \cap (V' \times V')$$

G



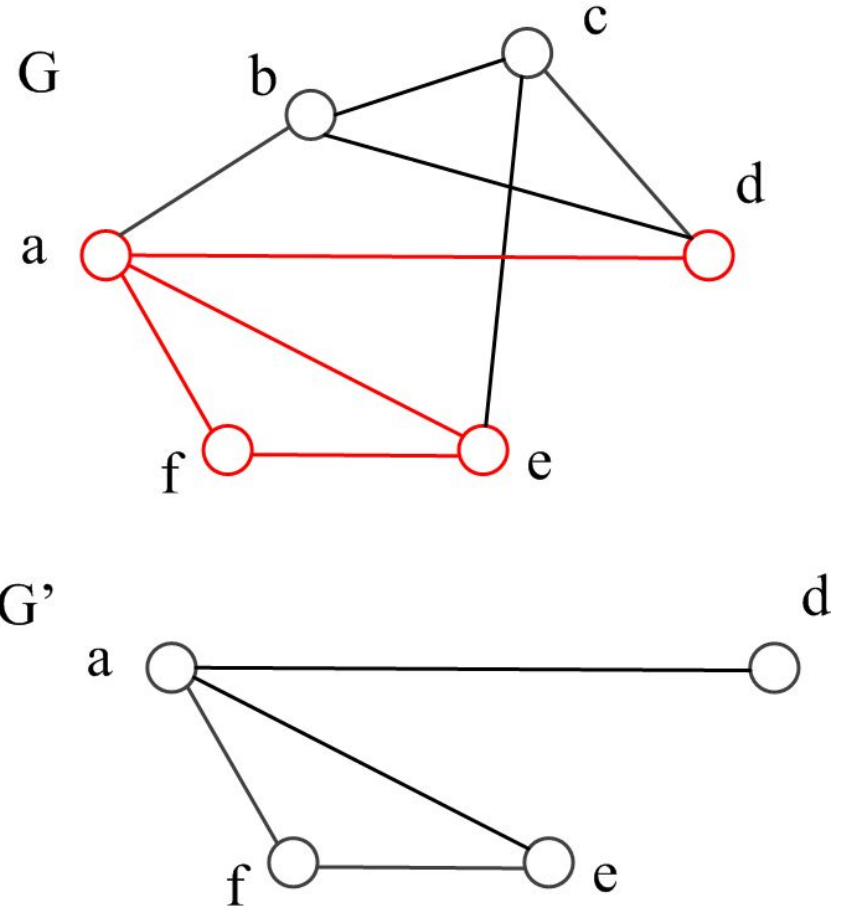
$G \setminus v_3$



Подграфы

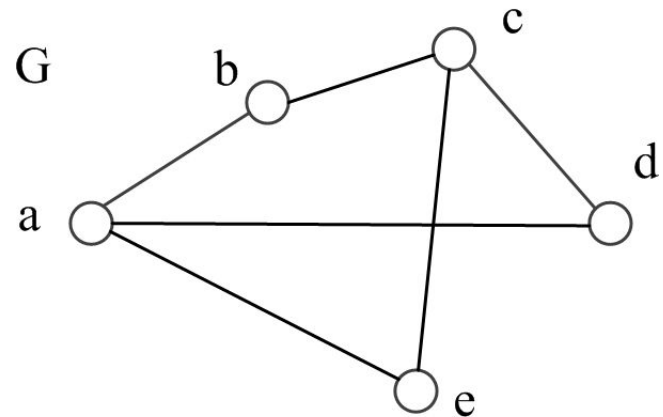
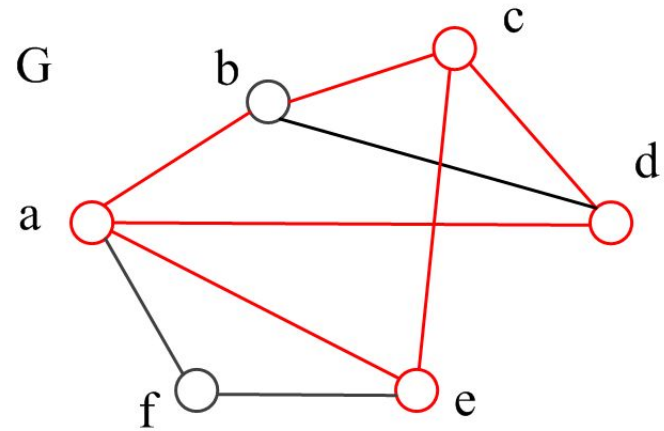
$G' = \langle V', U' \rangle$ -
подграф графа
 $G = \langle V, U \rangle$, если
 $V' \subseteq V$, $U' = U \cap (V' \times V')$

(*порождённый
подграф*)



Подграфы

$G' = \langle V', U' \rangle$ -
частичный
подграф графа
 $G = \langle V, U \rangle$, если
 $V' \subseteq V, U' \subseteq U \cap$
 $(V' \times V')$
(*частичный
граф, подграф*)



Дополнение графа

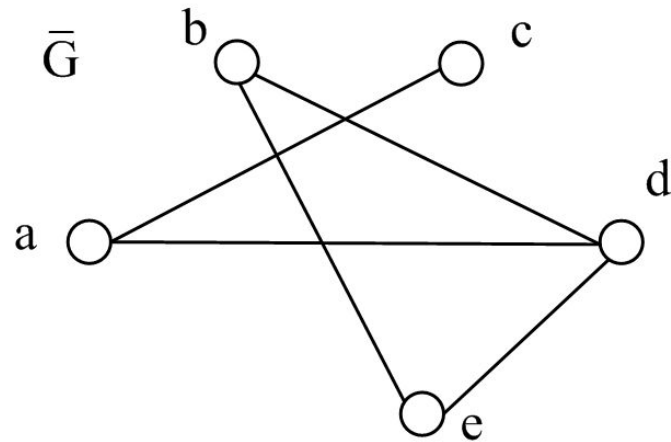
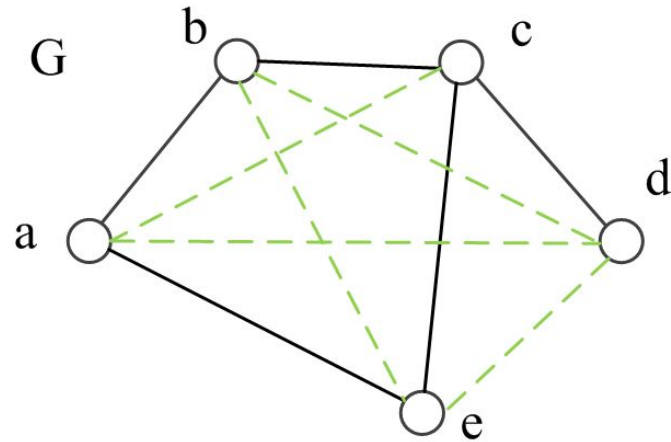
$\bar{G} = \langle V, U' \rangle$ -

дополнение

графа $G = \langle V, U \rangle$,

если

$U' = ((V \times V) \setminus U) \setminus I$



Самодополнительные графы

Граф, изоморфный своему
дополнению - самодополнительный

