

Теорема 5. Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество B .

Доказательство. Построение счетного множества B будем вести индукцией по номеру элемента n . Так как A бесконечно, то оно не пусто, то есть существует $a_1 \in A$. Обозначим $B_1 = \{a_1\}$. Допустим построено $B_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($a_i \neq a_j$ при $1 \leq i < j \leq n$). Множество $A \setminus B_n$ не пусто в силу бесконечности A , поэтому существует $a_{n+1} \in A \setminus B_n$. Положим $B_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$. Тогда все элементы в B_{n+1} попарно различны. Положим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Так как $B_n \subseteq A$, то и $B \subseteq A$, причем B – счетное множество. Теорема доказана.

Теорема 6. $|(0;1)| = |[0;1]|$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ – счетное подмножество множества

$A = (0;1)$. Построим биекцию f между множествами $A = (0;1)$ и $C = [0;1]$, используя существенным образом структуру множества B .

Пусть $f(1/2)=0$, $f(1/3)=1$, $f(1/4)=1/2$,

$f(1/5)=1/3, \dots, f(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$. Эта

"часть" отображения f биективно отображает множество B на $B \cup \{0;1\}$.

Таким образом, задав f следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A \setminus B; \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{1}{n+2}, n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{если } x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

получим $f : (0; 1) \rightarrow [0; 1]$, причем f – биекция. Теорема доказана.

Следствие 7. $| (a; b) | = | [a; b] | = | (a; b] | = | [a; b) |$.

Определение 8. Множество X называется бесконечным, если существуют $Y \subset X$ такое, что $|X| = |Y|$. Другими словами X бесконечно, если оно равномощно какому – либо своему собственному подмножеству. В противном случае множество X называется конечным.

§2. Объединение конечных и счетных множеств

Теорема 1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ – счетное множество, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – конечное множество, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда $A \cup B$ – счетное множество.

Доказательство. Построим биекцию между множествами N и $A \cup B$:

$$f(k) = b_k, k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$f(k) = a_{k-m}, k = m+1, m+2, \dots$$

Отображение f каждому натуральному числу ставит в соответствие элемент множества $A \cup B$, причем отображение f – биекция.

Теорема 2. Если A – счетное множество и B – конечное подмножество A , тогда $A \setminus B$ счетно.

Доказательство. Поскольку $A \setminus B$ есть подмножество счетного множества A , то $A \setminus B$ конечно или счетно. Допустим $A \setminus B$ конечно. Тогда в силу равенства $(A \setminus B) \sqcup B = A$ и в силу конечности B получаем конечность множества A , но A по условию счетное. Допущение неверно, значит $A \setminus B$ счетно.

Теорема 3. Если A счетное и B конечное множества, то $A \sqcup B$ счетно.

Доказательство. Отметим, что теорема 3 отличается от теоремы 1 тем, что здесь не требуется, чтобы A и B не пересекались. Пусть $C = A \cap B$. Так как $C \subseteq B$, то C также конечно. По теореме 2 $A_1 = A \setminus C$ - счетное множество, причем $A_1 \cap B = A \cap B$ и $A_1 \cap C = \emptyset$. Тогда по теореме 1 $|A \sqcup B| = |A_1 \sqcup B| = \omega$.

Теорема 4. Пусть A и B счетные множества и $A \cap B = \emptyset$. $A \cup B$ - счетное множество.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\}$ - списки множеств A и B . Построим биекцию между $A \cup B$ и N , следующим образом:

$$f(a_k) = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

$$f(b_k) = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots, m, \dots.$$

Так как $A \cap B = \emptyset$, отображение f задано корректно. Биективность f очевидна и проверяется стандартным образом.

Следствие 5. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ - счетные попарно пересекающиеся множества, тогда $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ также счетное множество.

Доказательство. Применим метод математической индукции по k . При $k=1$ утверждение очевидно. Допустим утверждение верно при $k=l$, то есть множество $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l$ счетно, и докажем это утверждение для $k=l+1$. Заметим, что $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l \cup A_{l+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l) \cup A_{l+1} = B \cup A_{l+1}$. Множество B счетно по индуктивному предположению, кроме того $A_{l+1} \cap B = A_{l+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l) = (A_{l+1} \cap A_1) \cup (A_{l+1} \cap A_2) \cup \dots \cup (A_{l+1} \cap A_l) = \emptyset$.

По теореме 4
 счетно. Следствие доказано.

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l \cup A_{l+1}$$

Доказательство. Если все $A_1, A_2, \dots, A_n$ конечны, то и объединение очевидным образом конечно. Теперь пусть среди A_i есть как конечные, так и счетные множества. После переобозначения можно считать, что $B_1, B_2, \dots, B_l$ - конечные множества, $C_1, C_2, \dots, C_m$ - счетные множества, причем $m+l=n$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $B_i \cap C_j = \emptyset$, $(1 \leq i < j \leq m)$. Множество $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_l$ конечно, множество $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ счетно по следствию 5, причем $B \cap C = \emptyset$. По теореме 3 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B \cup C$ - счетное множество. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — счетные множества. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ также счетно.

Доказательство. Рассмотрим следующую совокупность конечных или счетных множеств:
 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$
 $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}).$ Тогда $B_1, B_2, \dots, B_n$ есть совокупность попарно непересекающихся конечных или счетных множеств, причем
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n.$ По теореме 6 это множество является счетным.

Теорема 8. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – конечная совокупность конечных или счетных множеств. Тогда множество $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ счетно или конечно. Если все A_i конечны, то и объединение конечно; если среди A_i есть хотя бы одно счетное множество, то и объединение счетно.

Доказательство. Пусть некоторое A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) счетно. После переобозначения можно считать, что вся совокупность исходных множеств разбита на две группы: $B_1, B_2, \dots, B_l$ – совокупность конечных множеств, $C_1, C_2, \dots, C_m$ – совокупность счетных множеств ($m + l = n$). Тогда $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_l$ – конечное множество, $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ – счетное множество по теореме 7, $B \cup C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ – счетное множество.

Теорема 9. Пусть A – счетное множество и $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$. Тогда B не более чем счетно.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

Обозначим через $A_b \subseteq A$ прообраз b при отображении f , то есть $A_b = f^{-1}(b)$ для любого $b \in B$. Так как f – отображение “на”, то $A_b \neq \emptyset$. A_b по

одному элементу $a_b \in A_b$ – ^{Выберем в множестве}представитель множества A_b , так как $A_b \neq \emptyset$. Обозначим через $A' = \{a_b \mid b \in B\}$.

Отображение $g : A' \rightarrow B$, $g(a_b) = b$, является биекцией между множествами A' и B , значит $|A'| = |B|$. С другой стороны, $A' \subseteq A$, то есть A' является конечным или счетным множеством как подмножество счетного множества. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть B – счетное множество и $f : A \xrightarrow{1-1} B$. Тогда A не более, чем счетно.

Доказательство. Обозначим через $A' = f(A)$ образ множества A при отображении f . Отображение $f' : A \rightarrow A'$, $f'(a) = f(a)$, $a \in A$, есть биекция, поэтому $|A| = |A'|$. С другой стороны, A' есть подмножество счетного множества B , значит является конечным или счетным, значит A есть конечное или счетное множество. Теорема доказана.

§3. Декартовы произведения и счетные объединения счетных множеств

Обозначим:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ множество всех простых чисел.

Нами было доказано, что P бесконечно, кроме того, P является подмножеством счетного множества, значит P счетно.

$P_k = \{p_k^n \mid n \in N\}$ – множество всех степеней простого числа p_k . Например $P_3 = \{5^1, 5^2, 5^3, \dots, 5^n, \dots\}$. Ясно, что для любого $k \in N$ P_k счетно и для любых $i, j \in N$, $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$.

$P^* = \bigsqcup_{k \in N} P_k$ – множество всех степеней всех простых чисел. Поскольку $P^* \subseteq N$ и бесконечно, то P^* является счетным множеством.

Теорема 1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – счетная совокупность счетных попарно непересекающихся множеств. Тогда множество $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ также является счетным.

Доказательство. Так как A_k и P_k счетные множества, то существует биекция $f_k : A_k \rightarrow P_k$. Так как A_k попарно не пересекаются, то семейство отображений f_k согласовано. Так как P_k попарно не пересекаются, то $f = \bigsqcup_{k \in N} f_k$ является биекцией между множествами $\bigsqcup_{k \in N} A_k$ и $P^* = \bigsqcup_{k \in N} P_k$, то есть

$$\left| \bigsqcup_{k \in N} A_k \right| = |P^*| = \omega. \text{ Теорема доказана.}$$

Следствие 2. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ – счетная совокупность счетных или конечных множеств A_k , которые попарно не пересекаются. Тогда $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ счетно.

Доказательство. Применим теорему 1, дополнив каждое конечное множество до счетного таким образом, чтобы эти расширенные множества по-прежнему попарно не пересекались. Разобьем совокупность всех данных множеств на две группы:

$B_1, B_2, \dots, B_l, \dots$ – все конечные множества исходной совокупности,

$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ – все счетные множества исходной совокупности.

Множество $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_l \cup \dots$ конечно или
сечно, множество $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$ сечно,
причем $B \cap C = \emptyset$. По доказанному ранее $B \cup C$
сечно.

Теорема 3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — счетная совокупность счетных множеств и $A = \bigcup_{n \in N} A_n$. Тогда A счетное множество.

Доказательство. Построим счетную совокупность конечных или счетных попарно непересекающихся множеств, объединение которых

равно A : $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ...,

$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Очевидно, что

$B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. По следствию 2

множество $A = \bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{n \in N} A_n$ счетно.

Следствие 4. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — счетная совокупность конечных или счетных попарно различных множеств. Тогда множество $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \dots$ счетно.

Теорема 5. Пусть A и B счетные множества. Тогда декартово произведение $A \times B$ также является счетным множеством.

Доказательство. Перечислим элементы множеств A и B : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\}$. Тогда $A \times B = \{(a_i; a_j) \mid i, j \in N\}$. Разобьем $A \times B$ на счетное объединение счетных множеств:

$$A_1 = \{(a_1; b_1), (a_1; b_2), \dots, (a_1; b_n), \dots\},$$

$$A_2 = \{(a_2; b_1), (a_2; b_2), \dots, (a_2; b_n), \dots\},$$

.....

$$A_m = \{(a_m; b_1), (a_m; b_2), \dots, (a_m; b_n), \dots\}.$$

Очевидно, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, при $i \neq j$, т.к. $a_i \neq a_j$, и

$\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = A \times B$, то есть $A \times B$ есть объединение счетного

числа счетных попарно непересекающихся множеств.
Значит $A \times B$ счетно.

Следствие 6. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ – счетные множества,
тогда $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ – счетно.

Теорема 7. Множество рациональных чисел Q счетно.

Доказательство. Множество целых чисел Z счетно, значит и множество $Z \times Z$ счетно. Множество $Z \times (Z \setminus \{0\})$ также счетно. Каждой паре $(a; b)$, где $a \in Z, b \in Z \setminus \{0\}$ поставим в соответствие рациональное число $a: b$. Это отображение $f: Z \times (Z \setminus \{0\}) \rightarrow Q$ является отображением “на”, поэтому Q не более чем счетно, а так как оно бесконечно, то $|Q| = \omega$.

Определение 8.

а) Число α называется алгебраическим числом степени n , если α есть корень целочисленного многочлена $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

б) Число α называется алгебраическим, если оно есть алгебраическое некоторой степени.

Примеры.

1) Любое рациональное число $a: b$ является алгебраическим степени 1, так как оно является корнем целочисленного уравнения $b x + a = 0$.

2) Число $\sqrt{2}$ является алгебраическим числом степени 2, так как является корнем целочисленного уравнения $x^2 - 2 = 0$.

3) Докажем, что $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ является алгебраическим числом степени 6. В самом деле,

$$x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^3 - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(x^3 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^6 - 2x^3 - 1 = 0.$$

Теорема 9. Множество алгебраических чисел счетно.

Доказательство. Каждый многочлен степени n $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ полностью определяется набором целых чисел $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ длины $n+1$. Поэтому целочисленных многочленов существует столько же, сколько существует таких наборов, то есть $|Z^{n+1}|$, но $|Z^{n+1}| = \omega$. Таким образом, целочисленных многочленов степени n существует счетное число. Пусть P_n - множество всех целочисленных многочленов степени n и $P = \bigsqcup_{n \in N} P_n$ - множество всех целочисленных многочленов. Так как P есть счетное объединение счетных множеств, то оно само счетно.

Итак, множество всех целочисленных многочленов имеет счетную мощность. Перечислим все его элементы: $P = \{P_1^{k_1}, P_2^{k_2}, \dots, P_n^{k_n}, \dots\}$. Индекс сверху показывает степень многочлена P_n . По основной теореме алгебры многочлен $P_n^{k_n}$ имеет k_n корней. Обозначим через A_n конечное множество всех корней многочлена $P_n^{k_n}$. Тогда $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ есть множество всех алгебраических чисел. Поскольку A есть счетное объединение конечных множеств, то A счетно. Теорема доказана.