

Лекция 10.

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Цель: Рассмотреть события и действия над ними на языке теории множеств. Разобрать теоремы сложения и умножения вероятностей.

Терминология

- Ω – множество всех возможных исходов опыта.
- $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega$ – элементарное событие (неразложимый исход опыта).
- Любое событие A есть некоторое подмножество Ω ($A \subseteq \Omega$).
- Ω – достоверное событие,
- \emptyset – невозможное событие.

Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$,
- $A = \{ \omega : \omega \text{ – положительная оценка} \}$
- $A = \{3;4;5\}$

Основные определения

- Определение 1: Суммой двух событий A , B называется событие C , состоящее в выполнении события A или события B
 $C = A \cup B = A + B$. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.
- Определение 2: Произведением нескольких событий называется событие C , состоящее в совместном выполнении всех этих событий
 $C = A \cap B = A \cdot B$

Основные определения

- Определение 3: События A_1, A_2, \dots, A_n – образуют полную группу, если
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$
- Определение 4: События A_1, A_2, \dots, A_n несовместные, если $A_j \cap A_i = \emptyset$ ($i \neq j$)
- Определение 5: Противоположным по отношению к событию A называется событие \bar{A} , состоящее в не появлении A , а значит дополняющее его до Ω

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$,
- Событие A : получение пятерки
- Событие \bar{A} : ?
- \bar{A} : получение 2, 3, 4.

Теорема сложения вероятностей

- Теорема 1: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (AB = \emptyset)$$

Пример: Студент берет билет (1,2,3,...,10). Какова вероятность того, что он выберет билет с четным номером?

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

- В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

- **Пример**: Студент берет билет $(1, 2, 3, \dots, 10)$. Какова вероятность того, что студент вытянет билет, номер которого делится на 2 или на 3?

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

- Теорема 2:

1)
$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (A_i A_j = \emptyset, i \neq j),$$

2)
$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

- Если A_1, \dots, A_n – несовместны, образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$

- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Определения

- Определение 6: Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A , вычисляемая при условии, что событие B произошло. Обозначается $P(A|B)$.
- Определение 7: События A и B называются независимыми, если появление одного не меняет вероятности появления другого.
 $P(A | B) = P(A)$, $P(B | A) = P(B)$, для независимых событий.

Теорема умножения вероятностей

- Теорема 3:
- Для независимых событий:
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B),$
 $P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$
- Для произвольных событий
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A),$
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) =$
 $= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$

Примеры:

- Из 25 билетов, студент знает 20 билетов. Какова вероятность того, что студент ответит на 3 вопроса?

$$\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{4 \cdot 19 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 23} = \frac{19 \cdot 3}{5 \cdot 23} = \frac{57}{115}$$

- Студент знает половину билетов какая вероятность того, что он ответит на три вопроса?

$$\frac{n}{2n} \cdot \frac{\frac{n}{2}-1}{n-1} \cdot \frac{\frac{n}{2}-2}{n-2} = \frac{(n-2) \cdot (n-4)}{8(n-1)(n-2)} = \frac{n-4}{8(n-1)}$$

- Студент знает половину материала. Вопросы задаются случайным образом по всему курсу. Какова вероятность ответить на три вопроса?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Примеры

- Студент сдает три экзамена. A_i – сдан i экзамен. Представить в виде суммы, произведения следующие события:

- А – все три экзамена сданы $A_1 A_2 A_3$
- В – все три экзамена не сданы $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$
- С – первый и второй не сдан $\bar{A}_1 \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$
- D – хотя бы один сдан $A_1 + A_2 + A_3 = \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3}$
- E – хотя бы один не сдан $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 = \overline{A_1 A_2 A_3}$
- G – только 3-ий сдан $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$
- F – не менее двух сдано $A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$

- H – не более одного сдано $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

Примеры

- Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,6, второго – 0,7. Записать указанные события и найти вероятность того, что
- а) попадут оба стрелка
- б) промахнуться оба
- в) попадет первый и не попадет второй стрелок
- д) попадет только один стрелок

• Решение: $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,6 = 0,4; P(\bar{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$

• а) $P(A_1 A_2) = P(A_1) * P(A_2) = 0,6 * 0,7 = 0,42$

• б) $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) * P(\bar{A}_2) = 0,4 * 0,3 = 0,12$

• в) $P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1) * P(\bar{A}_2) = 0,6 * 0,3 = 0,18$

• д) $P(\underbrace{A_1 \bar{A}_2}_{\text{несовм.}} + \underbrace{\bar{A}_1 A_2}_{\text{несовм.}}) = \underbrace{P(A_1 \bar{A}_2)}_{\text{незав.}} + \underbrace{P(\bar{A}_1 A_2)}_{\text{незав.}} = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,46$

- **Вопросы:**
- Чему равно произведение противоположных событий?
- Описать множество элементарных событий Ω для последнего примера.