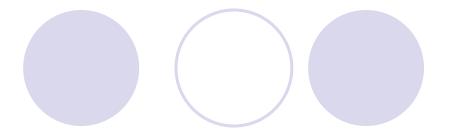
Теоремы сложения и умножения вероятностей

Терминология

- Ω множество всех возможных исходов опыта.
- $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega$ элементарное событие (неразложимый исход опыта).
- Любое событие A есть некоторое подмножество Ω ($A \subseteq \Omega$).
- \bullet Ω достоверное событие,
- Ø невозможное событие.

Пример



- Опыт получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$
- A= { ω:ω положительная оценка}
- $A = \{3;4;5\}$

Основные определения

- Определение 1: Суммой двух событий А, В называется событие С, состоящее в выполнении события А или события В
 С = A ∪ B = A + B . Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.
- Определение 2:Произведением нескольких событий называется событие С, состоящее в совместном выполнении всех этих событий

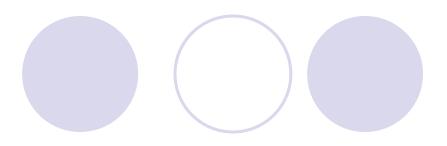
$$C = A \cap B = A \cdot B$$

Основные определения

- Определение 3: События А₁, А₂,...,Аₙ образуют полную группу, если
 А₁∪А₂ ∪ ... ∪Аₙ=Ω
- Определение 4: События А₁, А₂,...,А₂
 несовместные, если Ај∩Аі =Ø (i≠j)
- <u>Определение 5</u>: Противоположным по отношению к событию A называется событие \overline{A} , состоящее в не появлении A, а значит дополняющее его до Ω

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

Пример



- Опыт получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$,
- Событие А : получение пятерки
- Событие \overline{A} : ?
- \overline{A} : получение 2, 3, 4.

Теорема сложения вероятностей

 Теорема 1: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) (AB = \emptyset)$$

Пример: Студент берет билет (1,2,3,...,10). Какова вероятность того, что он выберет билет с четным номером?

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

 В случае, когда события А и В совместны, вероятность их суммы выражается формулой:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Пример: Студент берет билет (1,2,3,...,10).
 Какова вероятность того, что студент вытянет билет, номер которого делится на 2 или на 3?

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

• <u>Теорема 2</u>:

1)
$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \qquad \text{(Ai Aj = Ø, i \neq j)},$$

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

- Если $A_1, ..., A_n$ несовместны, образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$
- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Определения

- Определение 6: Условной вероятностью события А_при наличии В называется вероятность события А, вычисляемая при условии, что событие В произошло. Обозначается Р(АIВ).
- Определение 7: События А и В называются независимыми, если появление одного не меняет вероятности появления другого.
 Р(А | В) = Р(А), Р(В | А)=Р(В), для независимых событий.

Теорема умножения вероятностей

- *Теорема 3*:
- Для независимых событий:

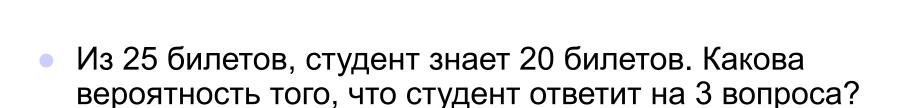
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$$

• Для произвольных событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A),$$

 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) =$
 $= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \dots P(A_n \mid A_1 \dots A_{n-1})$

Примеры:



Студент знает₂подовину₄былетов какая вероятность того, что он ответит на три вопроса?

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2}{2} = \frac{(n-2) \cdot (n-4)}{2} = \frac{n-4}{2}$$

Студент знает 2π оловину жатериал $= \frac{n-4}{8}$ Вопросы задаются случайным образом по всему курсу. Какова вероятность ответить на три вопроса?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Примеры

- Студент сдает три экзамена. А_і сдан *і* экзамен.
 Представить в виде суммы, произведения следующие события:
- А все три экзамена сданы
- В все три экзамена не сданы
- С первый и второй не сдан
- D хотя бы один сдан
- Е хотя бы один не сдан
- G только 3-ий сдан
- F не менее двух сдано

$$\overline{A}_{1}\overline{A}_{2}\overline{A}_{3}$$

$$\overline{A}_{1}\overline{A}_{2} = \overline{A}_{1}\overline{A}_{2}A_{3} + \overline{A}_{1}\overline{A}_{2}\overline{A}_{3}$$

$$A_{1} + A_{2} + A_{3} = \overline{\overline{A}_{1}}\overline{A}_{2}\overline{A}_{3}$$

$$\overline{A}_{1} + \overline{A}_{2} + \overline{A}_{3} = \overline{A}_{1}A_{2}\overline{A}_{3}$$

$$\overline{A}_{1}\overline{A}_{2}A_{3}$$

$$A_{1}A_{2} + A_{1}A_{3} + A_{2}A_{3} = A_{1}A_{2}\overline{A}_{3} + A_{1}\overline{A}_{2}A_{3} + A_{1}A_{2}A_{3}$$

$$+ \overline{A}_{1}A_{2}A_{3} + A_{1}A_{2}A_{3}$$

 $A_1A_2A_3$

Н – не более одного сдано

$$\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$$

Примеры

- Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,6, второго – 0,7. Записать указанные события и найти вероятность того, что
- а) попадут оба стрелка
- b) промахнуться оба
- с) попадет первый и не попадет второй стрелок
- d) попадет только один стрелок
- <u>Pewerue</u>: $P(\overline{A_1}) = 1 0.6 = 0.4; P(\overline{A_2}) = 1 0.7 = 0.3$
- a) $P(A_1A_2)=P(A_1)*P(A_2)=0.6*0.7=0.42$
- b) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) = 0.4 * 0.3 = 0.12$
- c) $P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) * P(\overline{A}_2) = 0.6 * 0.3 = 0.18$
- $P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$