Теоремы сложения и умножения вероятностей

Терминология

- **Ω –** множество всех возможных исходов опыта.
- $\omega \in \Omega \Rightarrow$ ω – элементарное событие (неразложимый исход опыта).
- Любое событие A есть некоторое подмножество Ω ($A \subseteq \Omega$).
- Ω – достоверное событие,
- Ø – невозможное событие.

Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$,
- A= { ω:ω – положительная оценка}
- $A = \{3;4;5\}$

Основные определения

- *<u>Определение 1:</u>* Суммой двух событий A, B называется событие C, состоящее в выполнении события A или события B

  $C = A \cup B = A + B$. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.
- *<u>Определение 2</u>*:Произведением нескольких событий называется событие C, состоящее в совместном выполнении всех этих событий

  $C = A \cap B = A \cdot B$

Основные определения

- *<u>Определение 3</u>*: События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – образуют полную группу, если $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$
- *<u>Определение 4:</u>* События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместные, если $A_j \cap A_i = \varnothing$ $(i \neq j)$
- *<u>Определение 5</u>*: Противоположным по отношению к событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в не появлении A, а значит дополняющее его до Ω

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$,
- Событие A : получение пятерки
- Событие $\overline{A}$: ?
- $\overline{A}$: получение 2, 3, 4.

Теорема сложения вероятностей

- *<u>Теорема 1:</u>* Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (AB = \varnothing)$

<u>Пример:</u> Студент берет билет (1,2,3,…,10). Какова вероятность того, что он выберет билет с четным номером?

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

- В случае, когда события А и В совместны, вероятность их суммы выражается формулой:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

- **<u>Пример</u>**: Студент берет билет (1,2,3,…,10). Какова вероятность того, что студент вытянет билет, номер которого делится на 2 или на 3?

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

Теорема сложения вероятностей

- *<u>Теорема 2</u>*:

1) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_j)$$ (Ai Aj = Ø, i $\neq$ j),

2) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

- Если $A_1, \ldots, A_n$ – несовместны, образуют полную группу, то $$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$
- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Определения

- *__Определение 6:__* Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисляемая при условии, что событие B произошло. Обозначается P(A|B).
- *__Определение 7:__* События A и B называются независимыми, если появление одного не меняет вероятности появления другого.

$P(A \mid B) = P(A)$, $P(B \mid A)=P(B)$, для независимых событий.

Теорема умножения вероятностей

- *Теорема 3*:
- Для независимых событий:

  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$,

  $P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$
- Для произвольных событий

  $P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$,

  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) =$

$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})$

Примеры:

- Из 25 билетов, студент знает 20 билетов. Какова вероятность того, что студент ответит на 3 вопроса?

$$\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{4\cdot 19\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 23}=\frac{19\cdot 3}{5\cdot 23}=\frac{57}{115}$$

- Студент знает половину билетов какая вероятность того, что он ответит на три вопроса?

$$\frac{n}{2n}\cdot\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}\cdot\frac{\frac{n}{2}-2}{n-2}=\frac{(n-2)\cdot(n-4)}{8(n-1)(n-2)}=\frac{n-4}{8(n-1)}$$

- Студент знает половину материала. Вопросы задаются случайным образом по всему курсу. Какова вероятность ответить на три вопроса?

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Примеры

- Студент сдает три экзамена. A_i – сдан *i* экзамен. Представить в виде суммы, произведения следующие события:
- A – все три экзамена сданы $A_1A_2A_3$
- B – все три экзамена не сданы $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$
- C – первый и второй не сдан $\overline{A}_1\overline{A}_2 = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$
- D – хотя бы один сдан $A_1 + A_2 + A_3 = \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$
- E – хотя бы один не сдан $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \overline{A_1A_2A_3}$
- G – только 3-ий сдан $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$
- F – не менее двух сдано

$$A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

- H – не более одного сдано

$$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

Примеры

- Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,6, второго – 0,7. Записать указанные события и найти вероятность того, что
- a) попадут оба стрелка
- b) промахнуться оба
- c) попадет первый и не попадет второй стрелок
- d) попадет только один стрелок
- ***Решение***: $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;\ P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- a) $P(A_1A_2) = P(A_1) * P(A_2) = 0{,}6 * 0{,}7 = 0{,}42$
- b) $P(\overline{A_1}\overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) * P(\overline{A_2}) = 0{,}4 * 0{,}3 = 0{,}12$
- c) $P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1) * P(\overline{A_2}) = 0{,}6 * 0{,}3 = 0{,}18$
- d) $P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) \underset{несовм.}{=} P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) \underset{незав.}{=} P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}46$