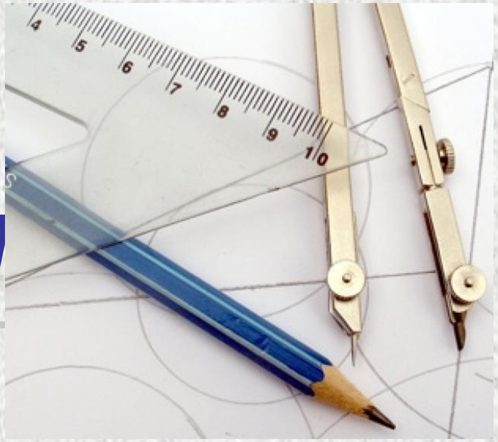
Теорема Менелая и теорема Чевы в школьном курсе математики



«Все незначительное нужно,
Чтобы значительному быть…»
И. Северянин

Работа учителя математики Колиной Н.К.,
МБОУ сош№17,г.Заволжье Нижегородской области

Содержание

Теоретические основы

- Теорема Чевы
- Теорема Менелая

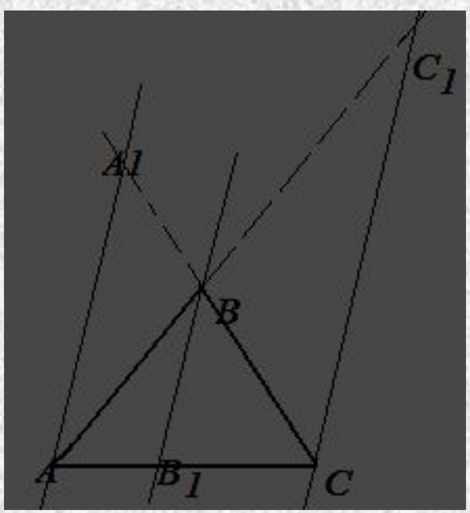
Методические рекомендации

- Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки
- Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса
- Применение теорем Менелая и Чевы в решении стереометрических задач

Теорема Чевы

- *Пусть в ΔABC на сторонах BC,AC,AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1,не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые А A_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

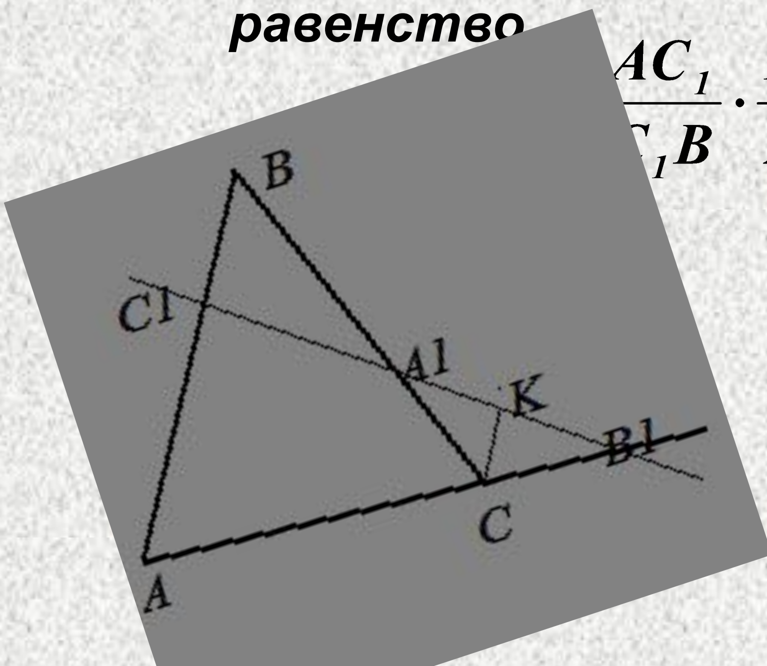
$AC_1 \quad BA_1 \quad CB_1$ [redacted]

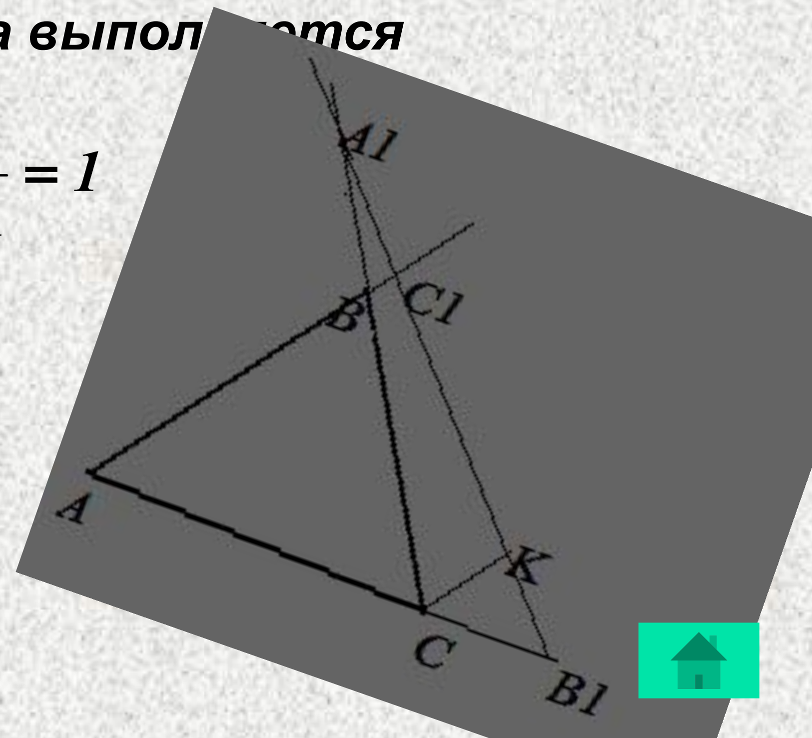


Теорема Менелая

- *Пусть на сторонах AB, BC и на продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB,BC и AC) ∆ABC взяты соответственно точки C_1,A_1 и B_1, не совпадающие с вершинами ∆ABC . Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

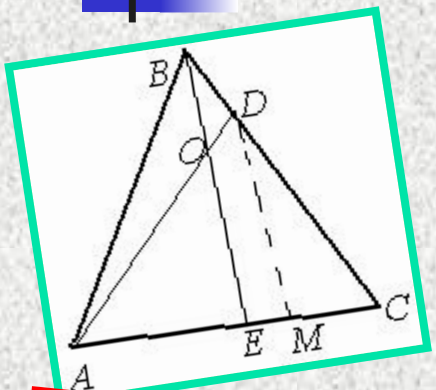




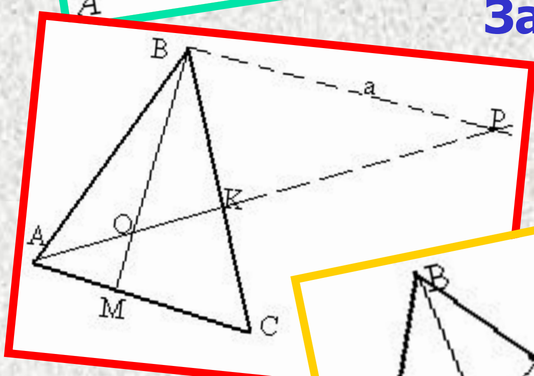
Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки

- 1. Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике.
- 2. Теорема Чевы и ее следствия. Применение теорем Чевы и Менелая к задачам на доказательство.
- 3. Решение задач на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.
- 4. Решение задач, связанных с нахождением площадей.
- 5. Комбинированные задачи.

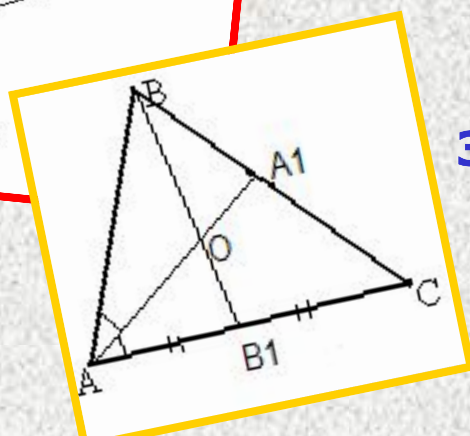
Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике



Задача 1. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении BD:DC= 1: 3, а точка O делит AD в отношении AO:OD=5:2. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?



Задача 2. В $\triangle$ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что AM: MC= 2:3, BK: KC= 4:3. В каком отношении AK делит отрезок BM?



Задача 3. В $\triangle$ABC AA_1 - биссектриса, BB_1- медиана; AB=2, AC=3; Найти $BO: OB_1$

Теорема Чевы и ее следствия.

- **Следствие1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины**.
- **Следствие 2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**
- **Следствие3. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.**

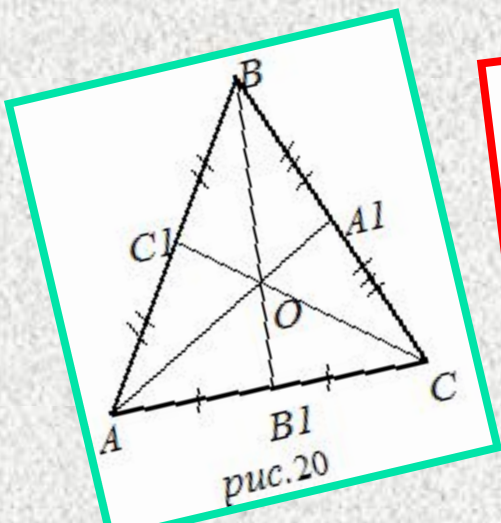


рис.20

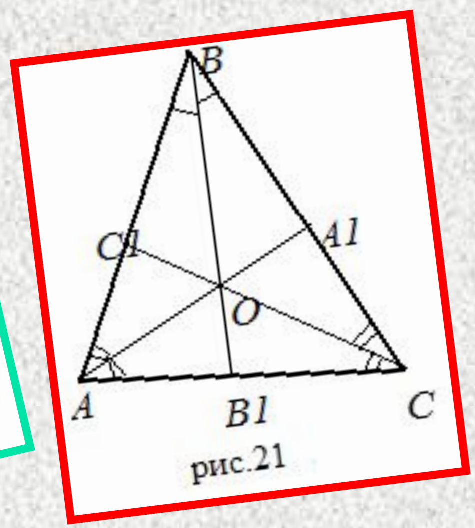


рис.21

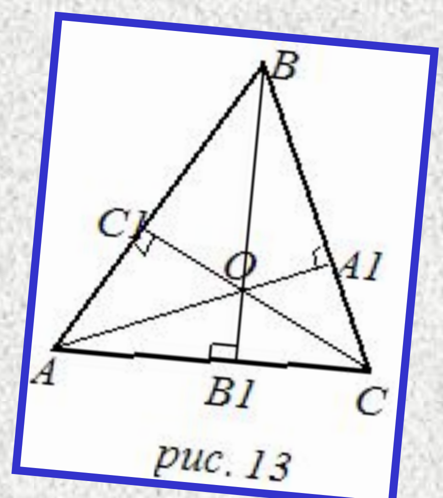
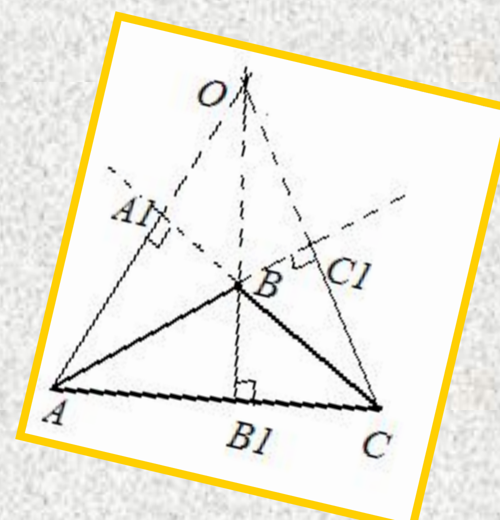


рис. 13



Теорема Чевы и ее следствия.

- Следствие4. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- Следствие 5. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

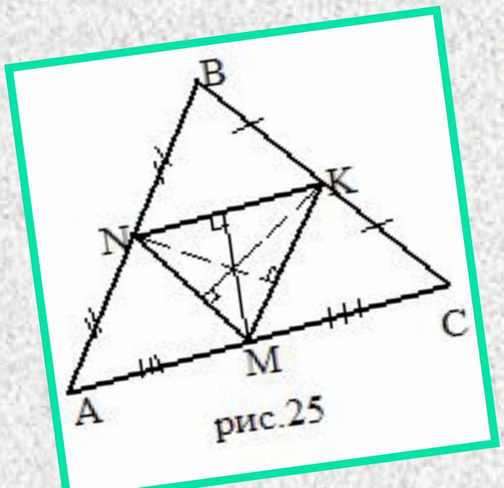


рис.25

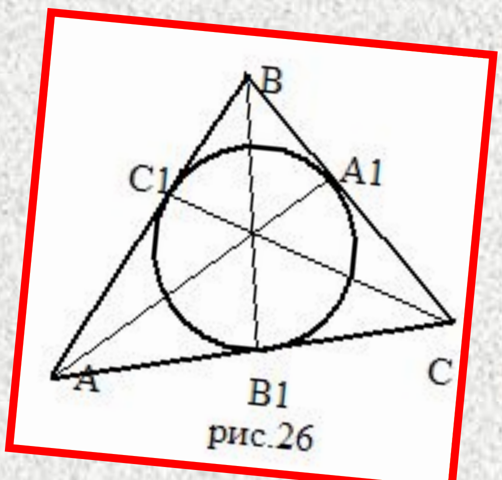


рис.26

Применение теорем Чевы и Менелая к задачам на доказательство

- **Задача 1.** **Используя теорему Чевы, доказать, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.**
- **Задача 2.** **На стороне АС треугольника АВС взяты точки Р и Е , на стороне ВС – точки М и К, причем АР: РЕ: ЕС= СК: КМ: МВ. Отрезки АМ и ВР пересекаются в точке О, отрезки АК и ВЕ – в точке Т. Докажите, что точки О, Т и С лежат на одной прямой.**

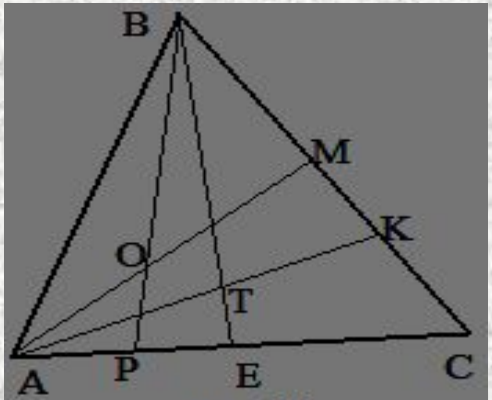


рис.28

Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.

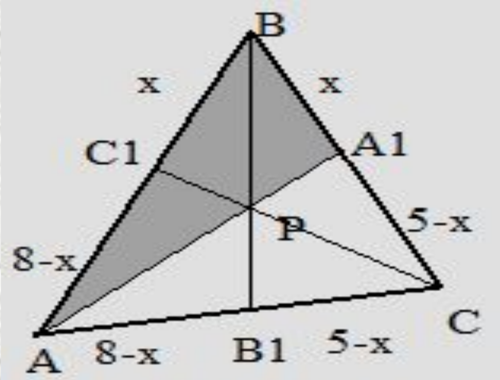
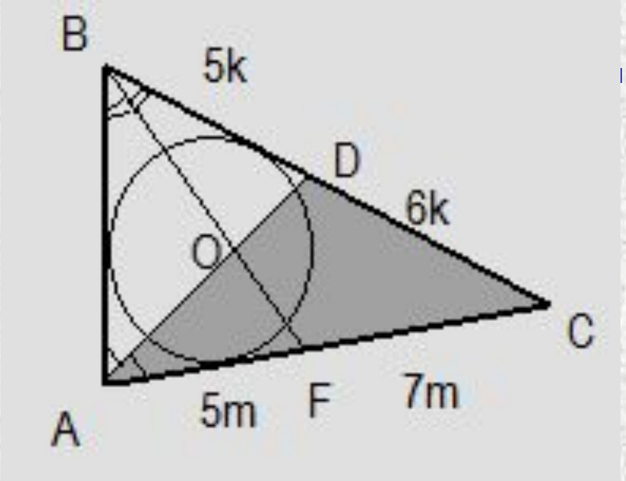
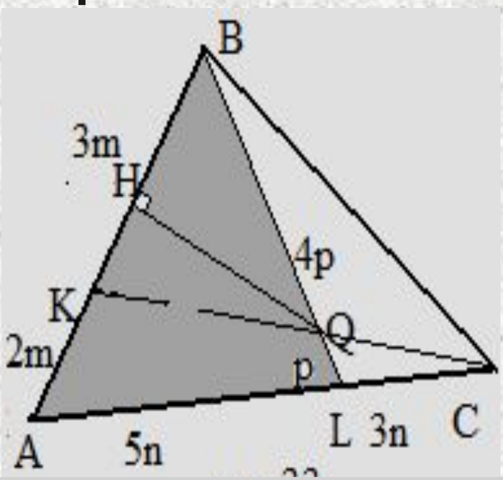


рис.30



- **Задача 1.** В треугольнике ABC, описанном около окружности, AB = 8, BC = 5, AC = 4. Точки A_1,B_1 и C_1 - точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC,AC и BA. Точка P - точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Найдите $AP:PA_1$.
- **Задача 2.** Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.



- **Задача 3.** В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении AK:BK = 2:3, а на стороне AC – точка L, делящая AC в отношении AL: LC = 5:3. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите длину стороны AB.

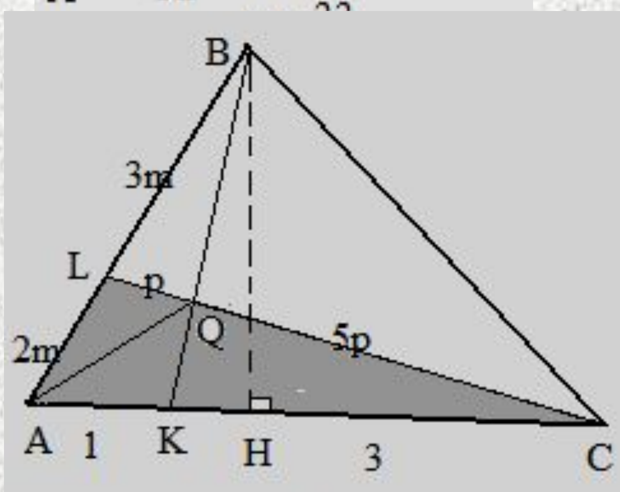
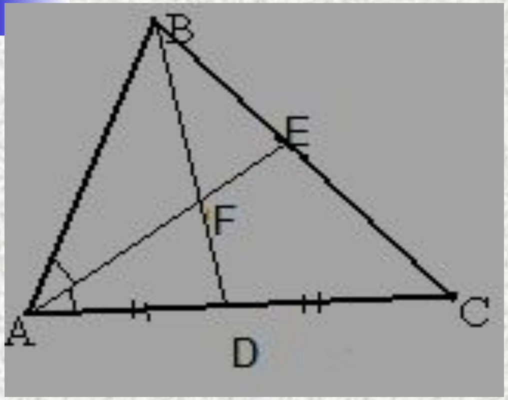


рис.34

- **Задача 4.** На стороне AC в треугольнике ABC взята точка K. AK=1, KC = 3. На стороне AB взята точка L. AL:LB=2:3. Q – точка пересечения прямых BK и CL. S = 1. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

Задачи, связанные с нахождением площадей



- **Задача 1.** Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника ABC , если AF=3FE, BD=4, AE=6.

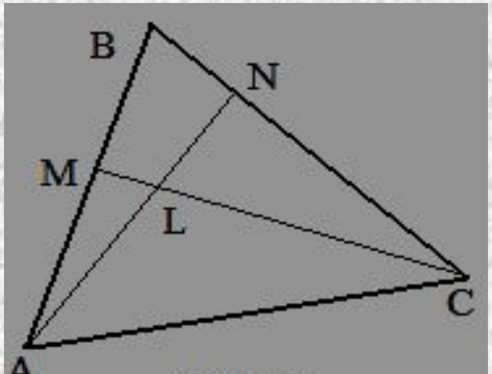


рис 39

- **Задача 2.** На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML , CNL и ALC равны соответственно 15, 48 и 40. Найти площадь треугольника ABC.

Комбинированные задачи.

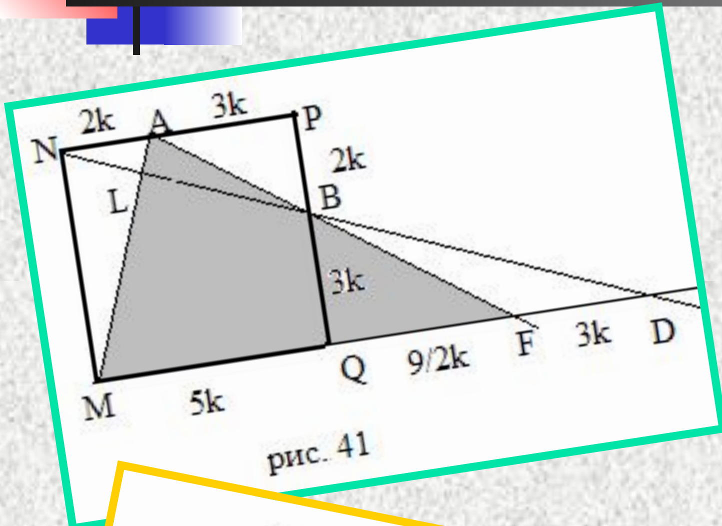


рис. 41

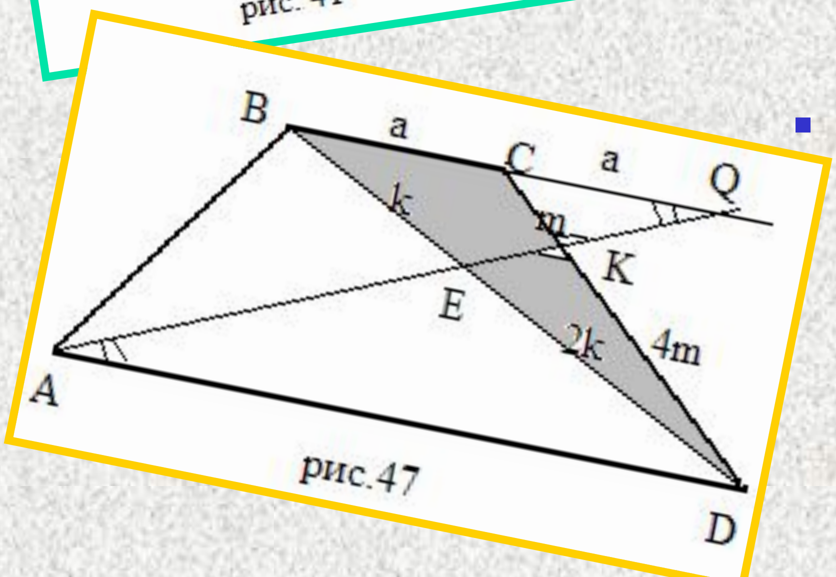


рис.47

- **Задача 1.** **На стороне NP квадрата MNPQ взята точка A, а на стороне PQ – точка B так, что NA:AP = PB:BQ = 2:3. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA?**

- **Задача 2.** **В трапеции ABCD с основаниями AD и BC через точку A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причем BE:ED=1:2, CK:KD=1:4. Найдите отношение длин оснований трапеции.**

Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

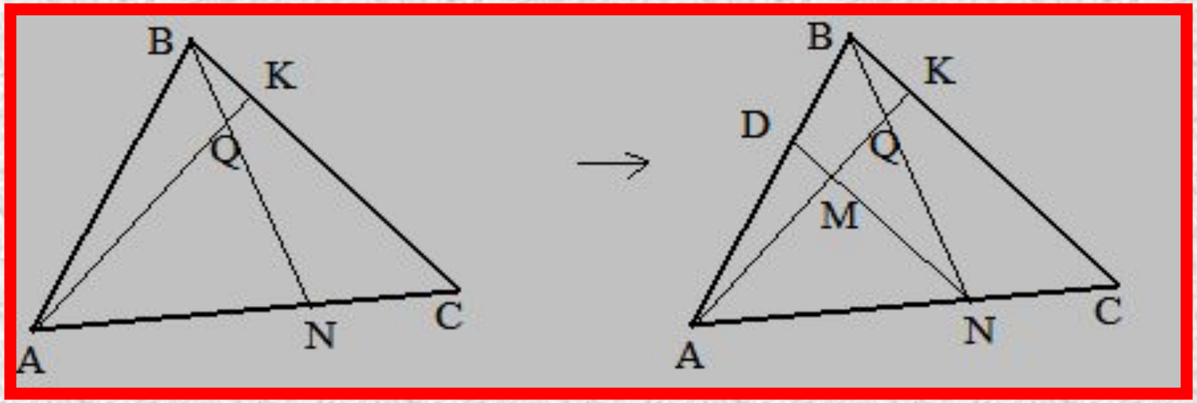
Урок 1. **Теорема Менелая и теорема Чевы.**

Задача. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N так, что AN:NC=m:n, на стороне BC- точка K. BN пересекает AK в точке Q, BQ : QN= p:q. Найти отношение площадей треугольников AKC и ABK.

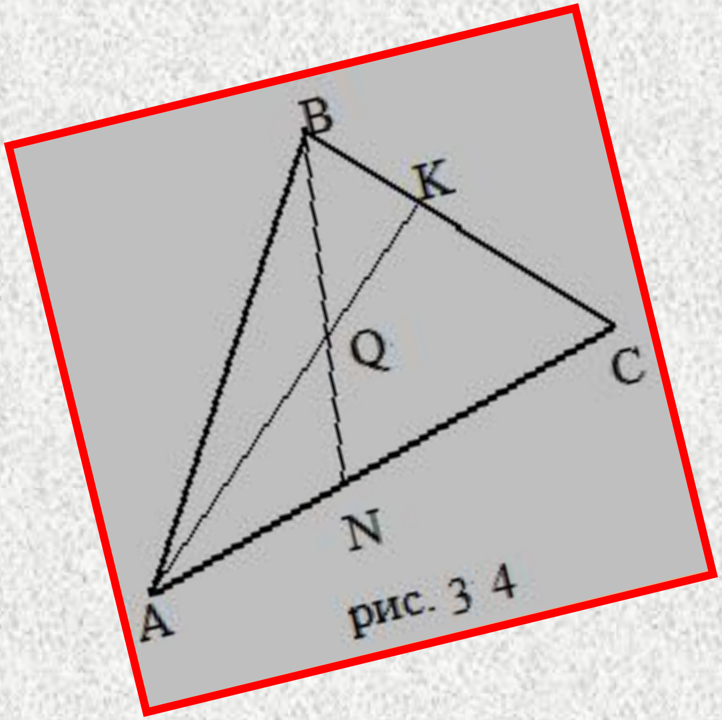
$$S_{AKC} : S_{ABK} = KC : BK$$

(т.к. высоты равны)

I способ. Дополнительное построение:
ND // BC.



II способ. Рассмотрим треугольник BCN и секущую AK. По теореме Менелая



$$\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{NA}{AC}=1;\frac{CK}{KB}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{m+n}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CK}{KB}=\frac{(m+n)q}{mp}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{AKC}:S_{ABK}=\frac{CK}{KB}=\frac{(m+n)q}{mp}.$$

Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

Урок 2. Применение теорем Менелая и Чевы в решении ключевых задач

Цели урока: 1) **формировать умения:**

- **-видеть конфигурации, удовлетворяющие заданным условиям;**
- **-решать задачи нестандартными способами;**
- **-использовать теоремы в задачах на доказательство;**

2) **развивать самостоятельность.**

Задача. **В равнобедренном треугольнике ABC (AC=BC) проведены медиана BN и высота AM, которые пересекаются в точке D. AD=5, DM=2. Найти** S_{ABC}

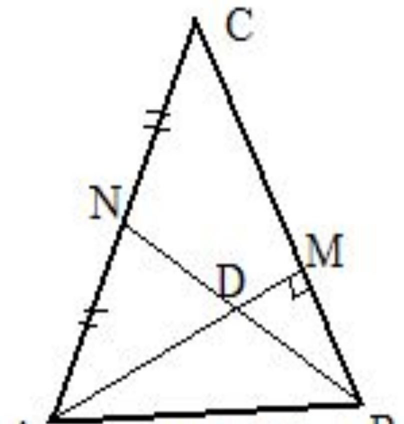


рис. 37

Решение: AN=NC, AM=5+2=7.

Рассмотрим ΔAMC и секущую NB. По теореме Менелая

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{MD}{DA}=1 \Rightarrow 1\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{2}{5}=1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{CB}{BM}=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{CM}{BM}=\frac{3}{2}$$

Пусть коэффициент пропорциональности равен k, тогда CM=3k, BM=2k. Из ΔACM- прямоугольного:

$$AC^2=CM^2+AM^2 \Rightarrow AC^2=9k^2+49 \qquad AC=CB \Rightarrow AC=5k \Rightarrow 25k^2=9k^2+49$$

$$k=\frac{7}{4} \Rightarrow CB=5k=\frac{35}{4} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot CB\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{4}\cdot 7=\frac{245}{8}$$

Ответ: $\frac{245}{8}$

Применение теорем Менелая и Чевы в решении стереометрических задач.

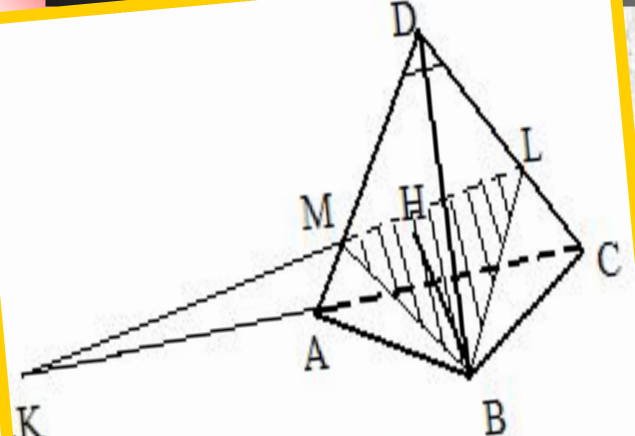


рис.48

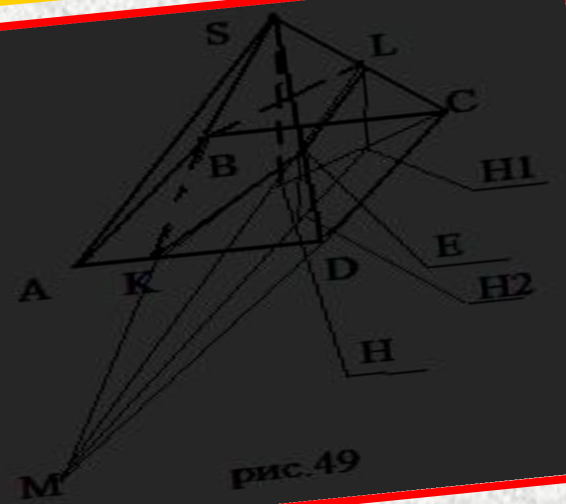
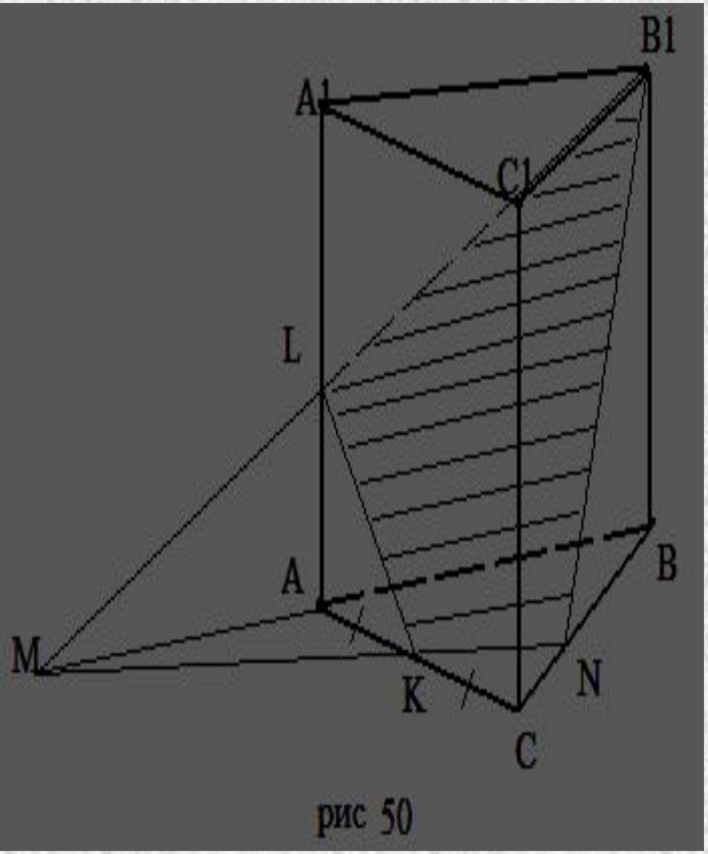


рис.49

- **Задача 1.** **На продолжении ребра AC правильной треугольной пирамиды ABCD с вершиной D взята точка K так, что KA: KC=3:4, а на ребре DC взята точка L так, что DL:LC=2:1. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки B, L и K?**

- **Задача 2.** **Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка M так, что DM=2CD . Через точки M, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении она делит объем пирамиды?**

Применение теорем Менелая и Чевы в решении стереометрических задач.



- **Задача 3.** Дана правильная треугольная призма с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. Причем на продолжении ребра BA взята точка M так, что MA=AB. Через точки M, B_1 и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении она делит объем призмы?

«Умение решать задачи- такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения»

Д.Пойа