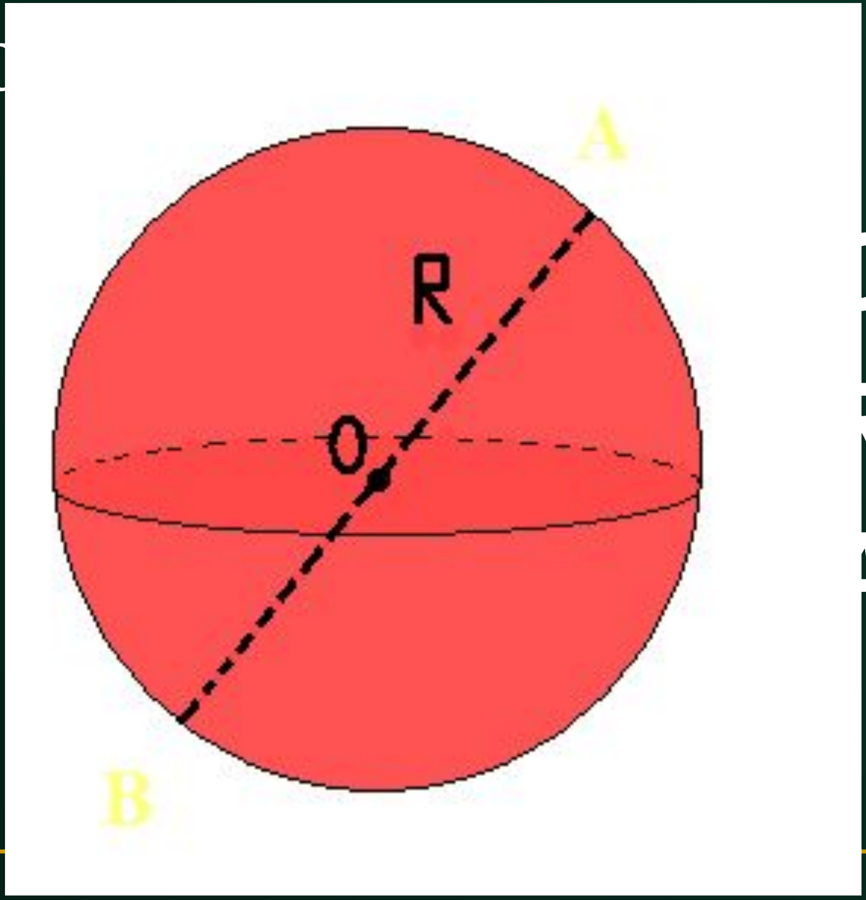
Тела вращения

Сфера

Шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии о



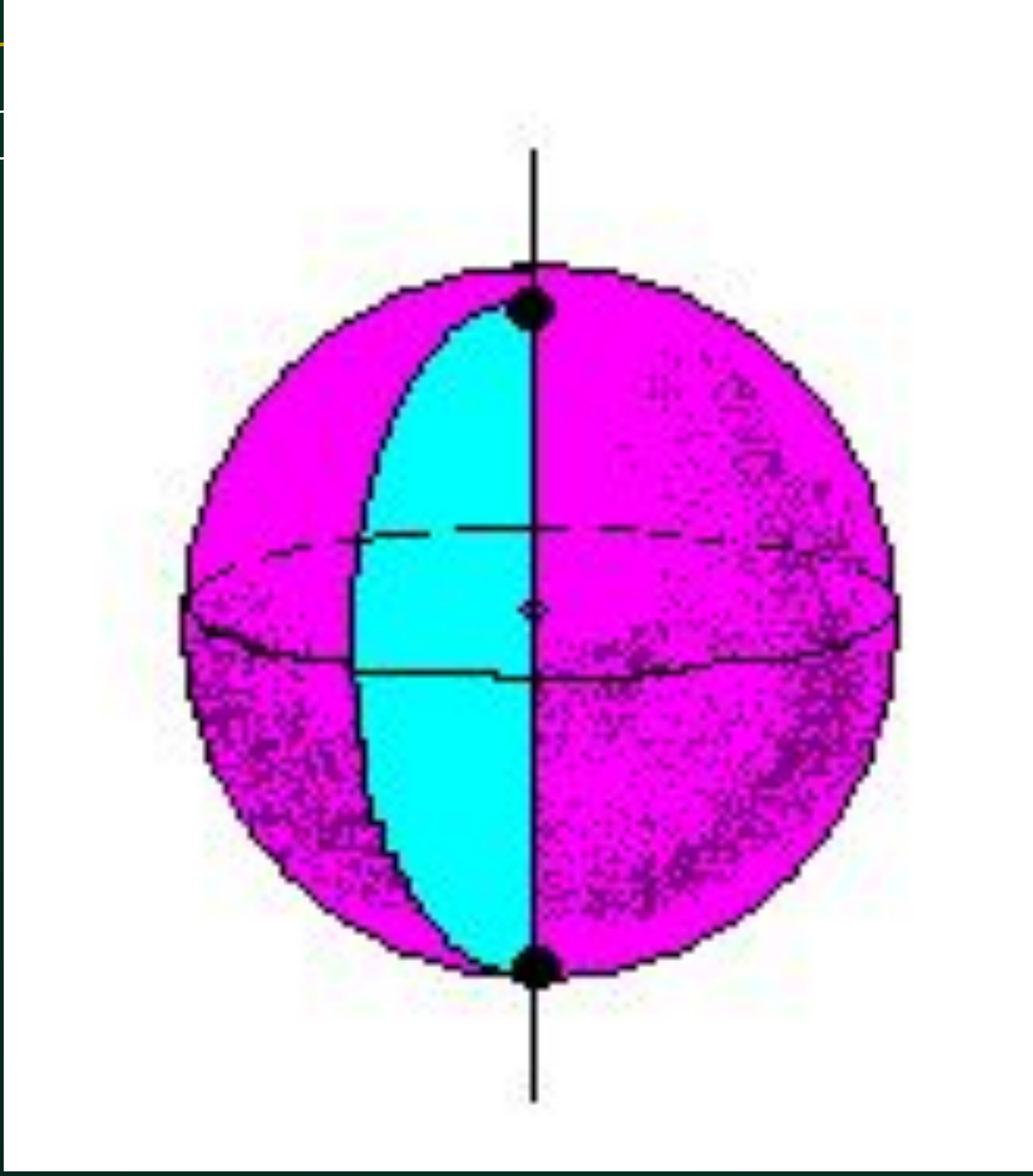
O- центр сферы

R- радиус сферы

AB- диаметр сферы

2R=AB

Сферу можно получить вращением полуокружно *ACB* вокруг диаметра *AB*



Шар

Шаром *называется тело ограниченное сферой.*

Центр, радиус и диаметр сферы называются также диаметром шара.

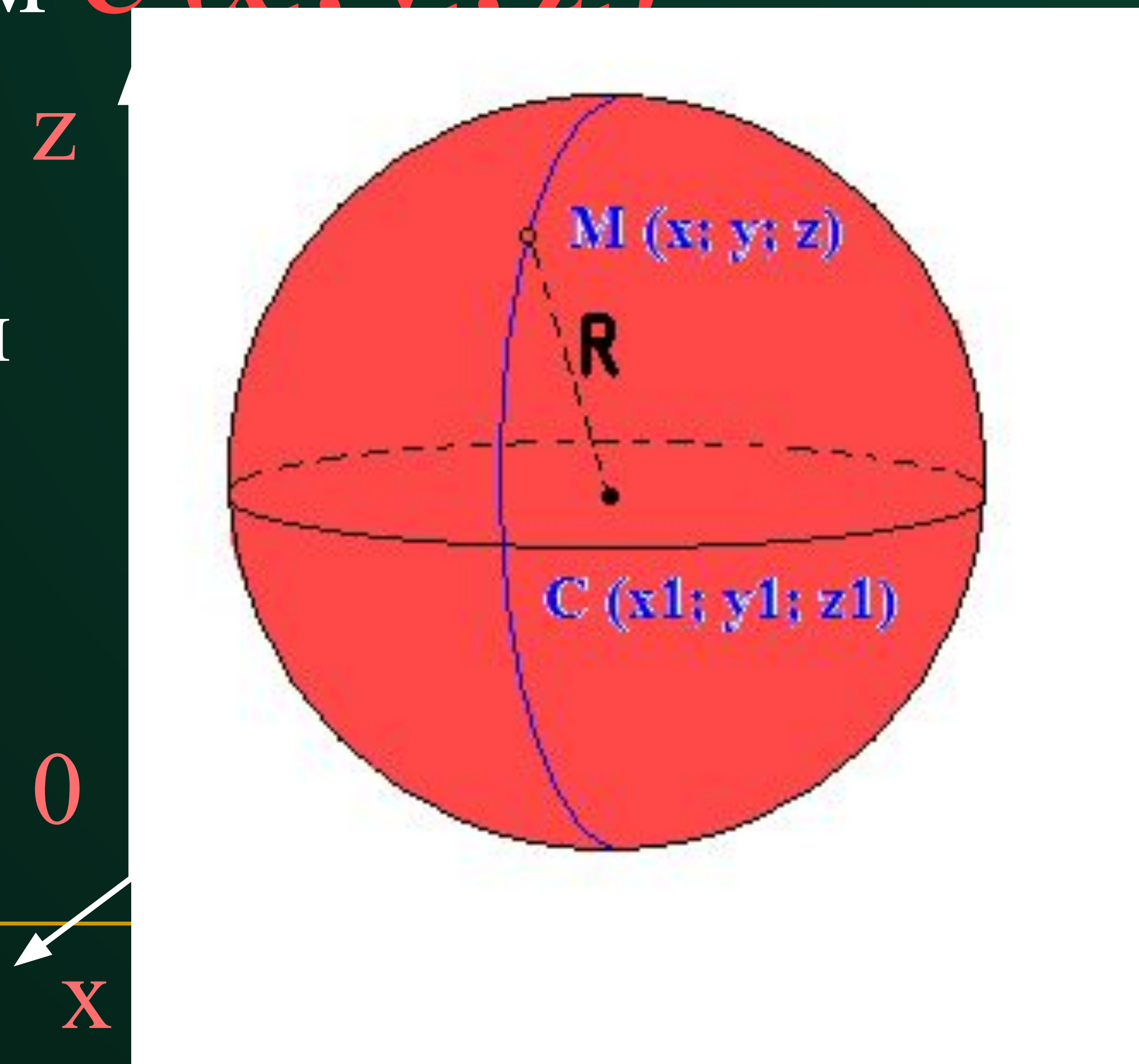
Уравнение сферы

- *Задана прямоугольная система координат **Oxy** и дана некоторая поверхность **F**, например плоскость или сфера . Уравнение с тремя переменными **x, y, z** называется уравнением поверхности **F** и не удовлетворяют координаты никакой точки , не лежащей на этой поверхности .*

См. далее

Выведем уравнение сферы радиуса ***R*** с центром ***C*** **$(x_1; y_1; z_1)$**

M (x; y; z) - произвольная точка сферы



Расстояние от произвольной точки $M\ (x;\ y;\ z)$ до точки C вычисляем по формуле

$$MC=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

- Если точка **M** лежит на данной сфере , то $MC=R$, **или** $MC^2=R^2$ т.е. координаты точки **M** удовлетворяют уравнению:

$$R^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

- Если точка **M** не лежит на данной сфере , то $MC^2 \neq R^2$ т.е. координаты точки **M** не удовлетворяют данного уравнения.

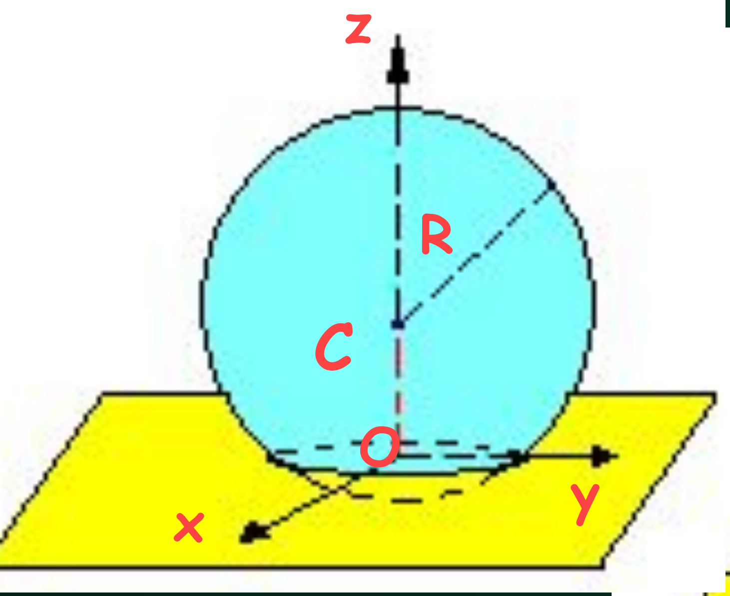
В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса ***R*** с центром ***C*** $(x_1; y_1; z_1)$ имеет вид

$$R^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

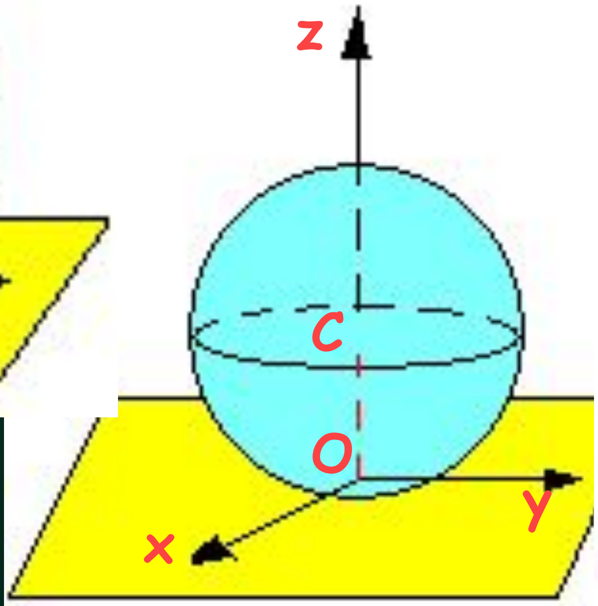
Взаимное расположение сферы и плоскости

Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центром до плоскости.

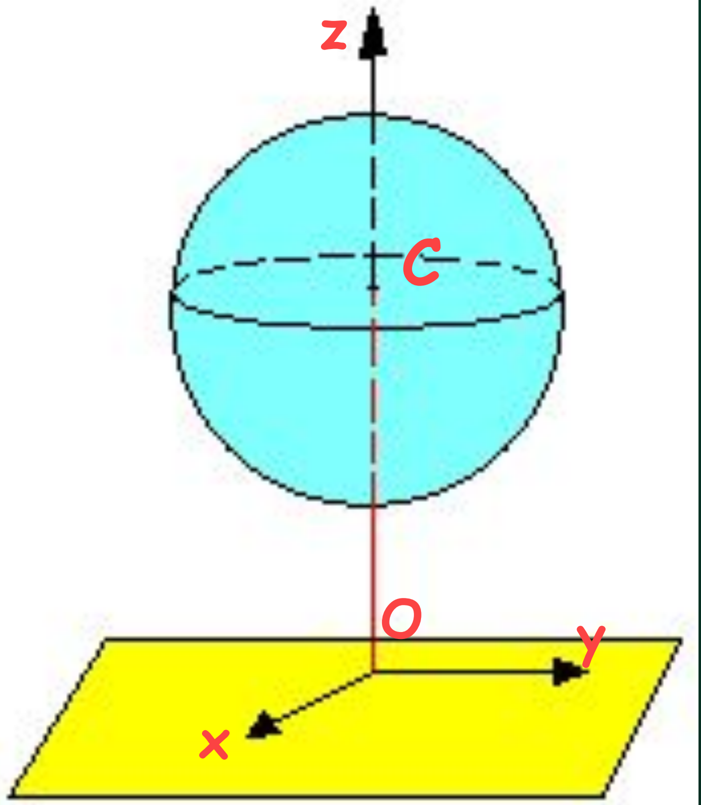
Взаимное расположение сферы и плоскости



$d<R, r=\sqrt{R^2-d^2}$



$d=R$



$d>R$

См. далее

Пусть радиус сферы - ***R***, а расстояние

от её центра до плоскости α - ***d***

- Введём систему координат, так чтобы плоскость *Oxy* совпадала с плоскостью α ,а центр сферы лежал по ***Oz*** , тогда уравнение плоскости α :$z=0$, а уравнение сферы с учётом (*C* имеет координаты $(0;0;d)$)

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$$

Составим систему уравнений :

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \end{cases}$$

Подставив $z=0$ во второе уравнение , получим :

$$x^2+y^2=R^2-d^2$$

Возможны три случая :

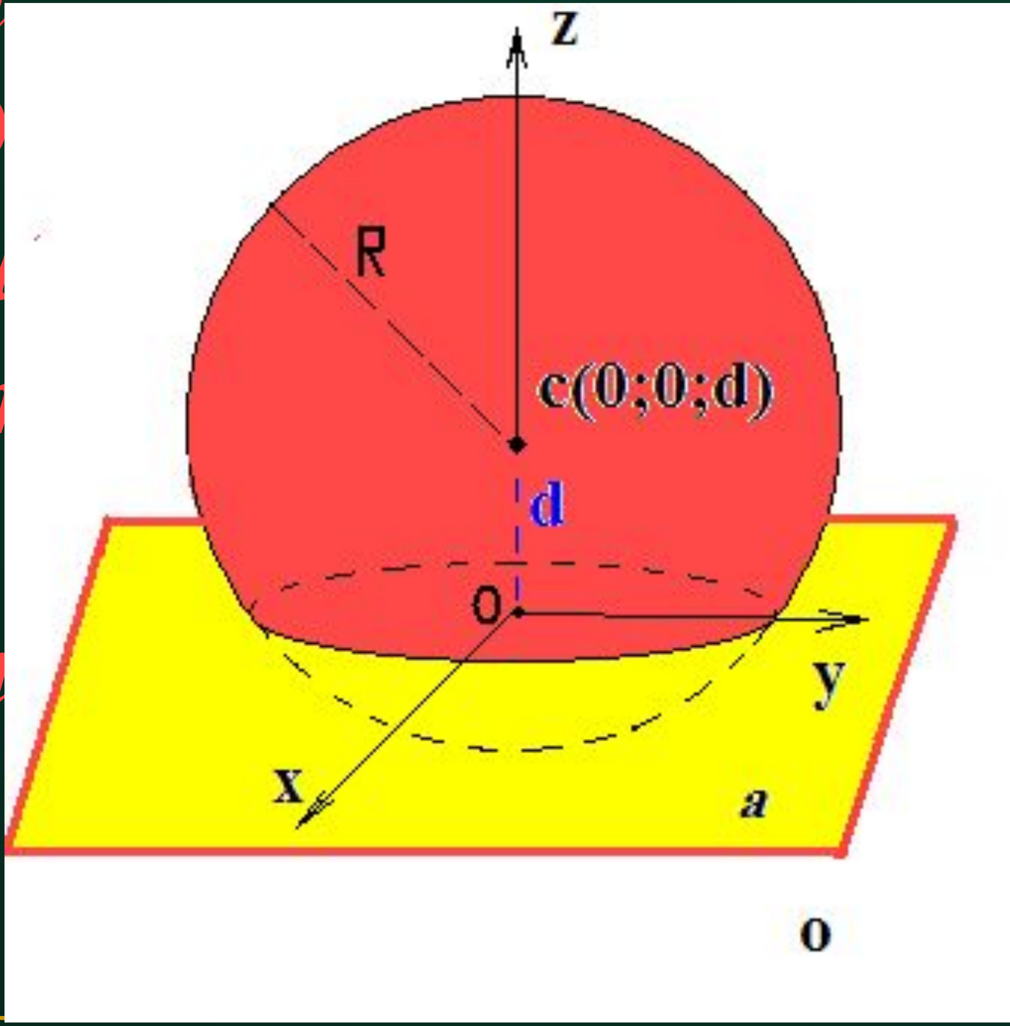
1) $d<R$, тогда $R^2-d^2>0$,

и уравнение

$x^2+y^2=R^2-d^2$ является уравнением окружности $r = \sqrt{R^2-d^2}$ с центром в точке O на плоскости Oxy.

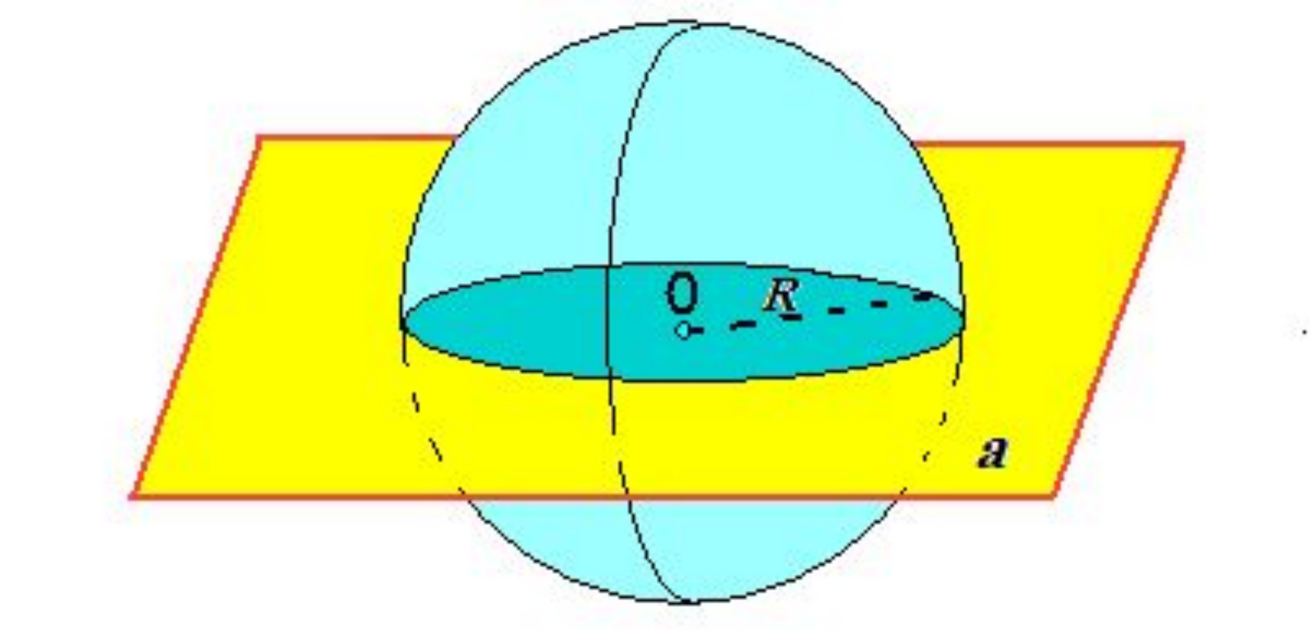
В данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Итак, если расстояние от центра сферы д плоскости меньш радиуса сферы, т сечение сферы плоскостью есть окружность .



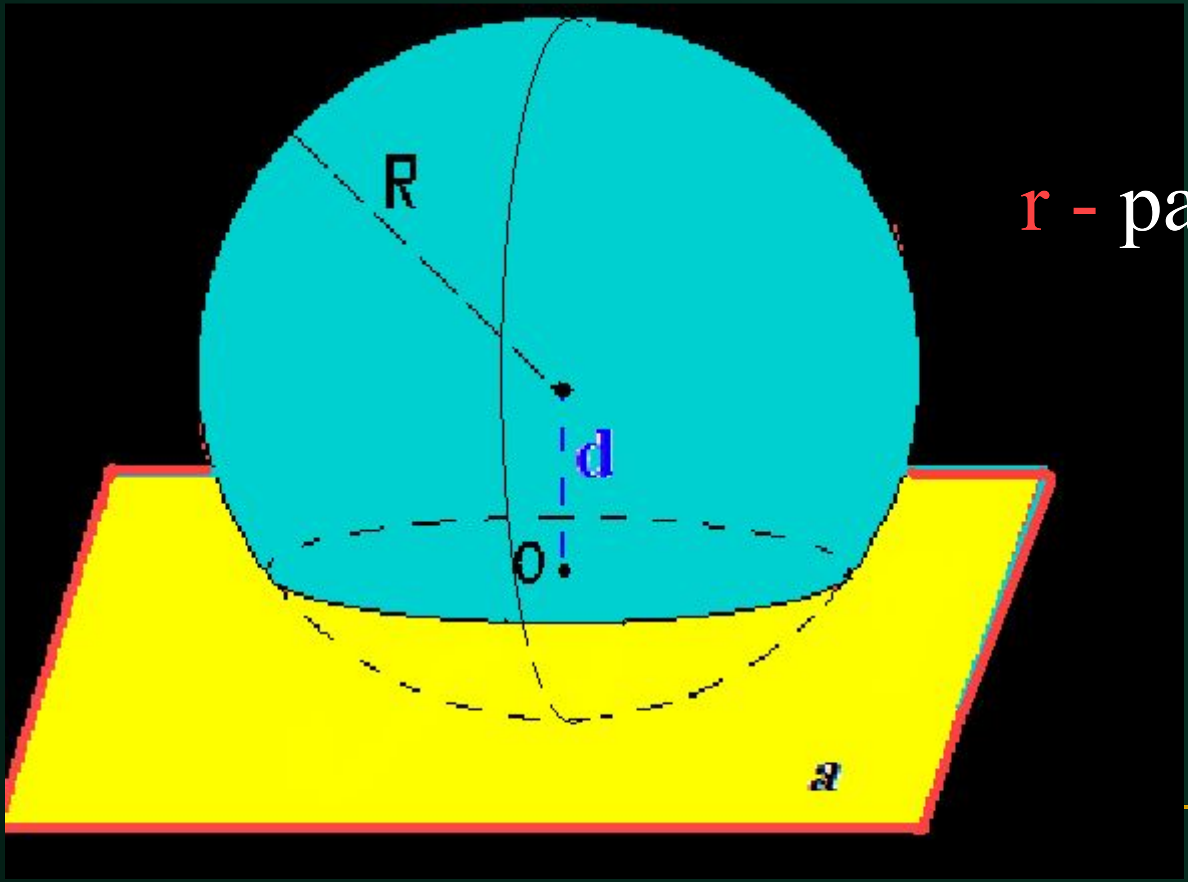
Ясно, что сечение шара плоскостью является круг.

- Если секущая плоскость проходит через центр шара, то d=0 и в сечении получается круг радиуса R, т.е. круг , радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется большим кругом шара.



- Если секущая плоскость не проходит через центр шара , то d>0 и радиус сечения

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$, меньше радиуса шара .



r - радиус сечения

2) $d=R$,тогда $R^2-d^2=0$,

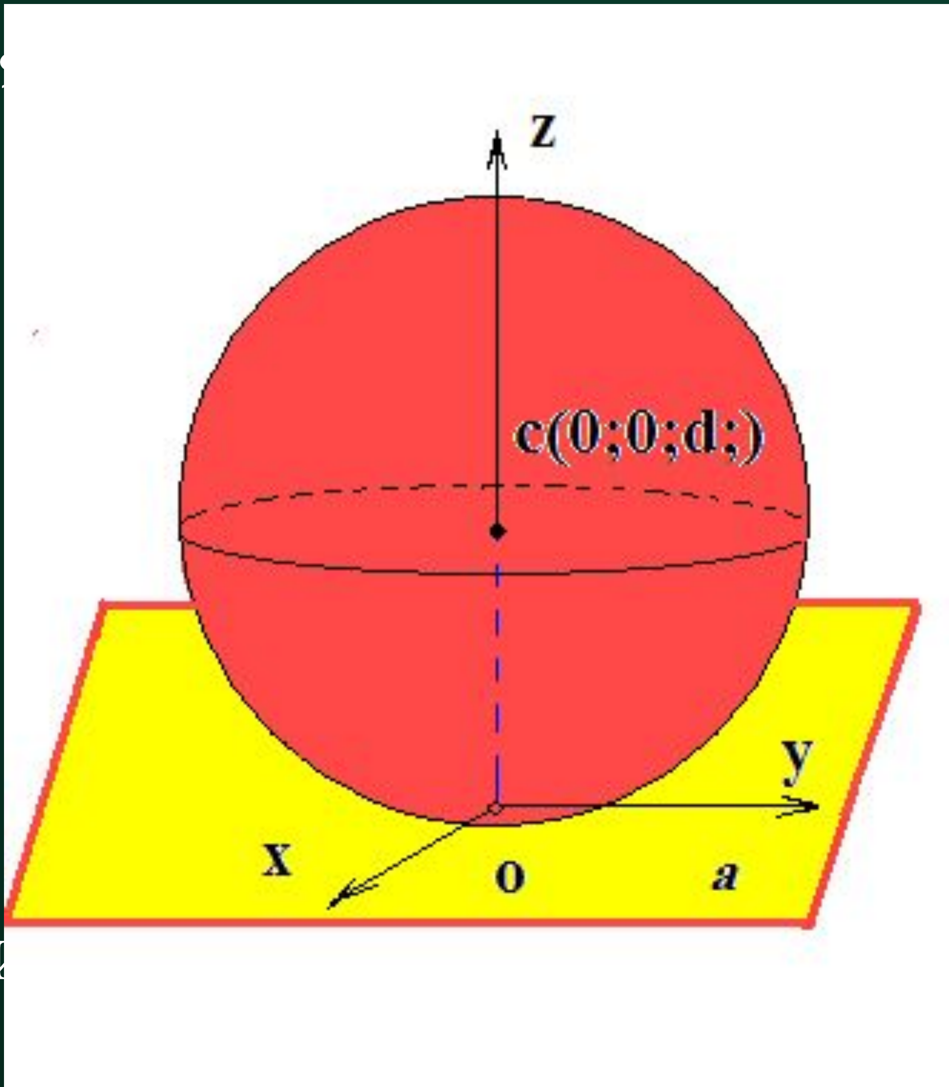
и уравнению удовлетворяют только

$x=0,\ y=0$,

а значит $O(0;0;0)$ удовлетворяют обоим уравнениям ,т.е.

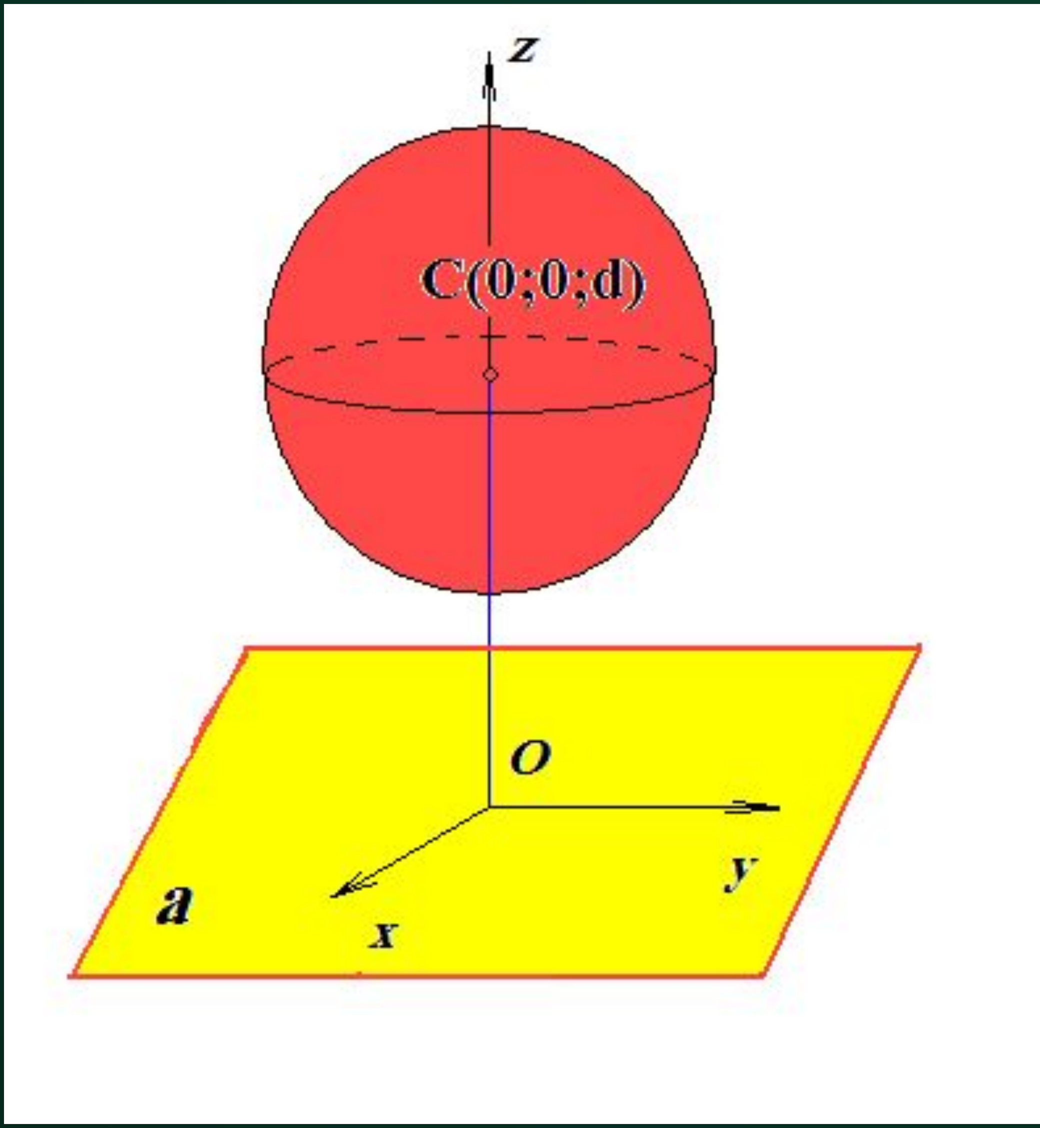
O- единственная общая точка сферы и плоскости

.



Итак, ***если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы , то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.***

3) $d>R$, тогда $R^2-d^2<0$, и уравнению $x^2+y^2=R^2-d^2$ не удовлетворяют координаты никакой точки.



Следовательно,

если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.