

Свойства степени с рациональным показателем.

Бродецкая Т. А.,
учитель математики
МОУ «Гимназия № 4»,
г.о. Электросталь





Арифметическим корнем n – ой степени ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n – я степень которого равна a :

$$\sqrt[n+1]{a^{2n+1}} = a, \quad n \in \mathbb{N} \quad ;$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \quad n \in \mathbb{N} \quad ;$$

$$\sqrt[nk]{a^{mn}} = \sqrt[k]{a^m}, \quad \text{при} \quad a \geq 0.$$



Степень с рациональным показателем.

1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a > 0$;

Если $\frac{m}{n} > 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при $a \geq 0$.

2) При $a > 0$, $b > 0$, p и q - рациональные числа:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p$$



Тренировочные упражнения

1) Вычислить: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$ **= -26,5**

2) Найдите значение выражения $\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}$ **= -2**

3) Упростить выражение $\frac{c \cdot c^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{c^4}}$ **= 1**

4) Найдите значение выражения $\left(\frac{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}{\sqrt{2c}+\sqrt{d}} - \frac{\sqrt{2c}+\sqrt{d}}{\sqrt{2c}-\sqrt{d}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{d}{2c}} - \sqrt{\frac{2c}{d}}\right)$ **= 4**

5) Упростить выражение $125^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot 49^{\frac{1}{2}}$ **= $7\sqrt{5} - 35$**

6) Упростить выражение $\sqrt{a^2+2+2\sqrt{a^2+1}} - \sqrt{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}$ **= 2**



Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

1) $5(\sqrt{27} - \sqrt{3}) : \frac{2}{\sqrt{3}}$

2) $((\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8})^2 - 6)((\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2 + 6)$

3) $\sqrt{8 - \sqrt{28}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}}$

4) $64^{\frac{5}{6}} - (0,125)^{\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4$

5) $(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4})$

Упростить:

6)

$$\frac{b^3 \sqrt{b^2}}{\sqrt[3]{b^4}}$$

7)

$$\left(\frac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2} \right) : (2a - a^2)^{-\frac{3}{4}}$$



Проверка

$$1) \quad 5(\sqrt{27} - \sqrt{3}) : \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5(3\sqrt{3} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$$

$$2) \quad ((\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8})^2 - 6)((\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2 + 6) =$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt[4]{2 \cdot 8} - 6)(\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2\sqrt[4]{2 \cdot 8} + 6) = \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2)(\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 - 4 = \\ &= 2 + 8 + 2\sqrt{16} - 4 = 14 \end{aligned}$$



Проверка

$$3) \sqrt{8 - \sqrt{28}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - 2\sqrt{7} + 7} - \sqrt{1 + 2\sqrt{7} + 7} = \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{7})^2} = \\ &= |1 - \sqrt{7}| - |1 + \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 1 - 1 - \sqrt{7} = -2 \end{aligned}$$

$$4) 64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4 =$$

$$\begin{aligned} &= (2^6)^{-\frac{5}{6}} - (0,5^3)^{-\frac{1}{3}} - 2^5 \cdot 2^{-4} \cdot (2^4)^{-\frac{3}{2}} + 1 \cdot 4 = \\ &= 2^{-5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2 \cdot 2^{-6} + 4 = 2^{-5} - 2 - 2^{-5} + 4 = 2 \end{aligned}$$



Проверка

$$5) (\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}) =$$

По формуле $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$ следует

$$= (\sqrt[3]{10})^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = 10 - 4 = 6$$

$$6) \frac{b\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^4}} = b^{1+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} = b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$$



Проверка

$$7) \left(\frac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2} \right) : (2a - a^2)^{-\frac{3}{4}} = 1$$

$$1) \frac{2 \cdot 0,5a^{\frac{1}{4}} + (2-a)^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}{2 \cdot (2-a)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}};$$

$$2) \frac{1 \cdot a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} (2-a)^{\frac{3}{4}}} = 1$$

Задание на дом.

- Тренировочный тест по теме «Свойства степени с рациональным показателем» (проверка на следующем уроке).



Тренировочный тест.

1. Найдите значение выражения: $6 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$.

1) 12; 2) 6; 3) 3; 4) -3.

2. Выберите верное неравенство:

1) $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$; 2) $0,3^{\frac{1}{2}} > 0,5^{\frac{1}{2}}$; 3) $1,5^{\frac{1}{3}} < 1$; 4) $3^{-8} < 0$.

3. Среди данных чисел выберите наибольшее:

1) $5^{\frac{1}{2}}$; 2) $5^{\frac{1}{3}}$; 3) $5^{\frac{1}{4}}$; 4) 5.

4. Представьте данное выражение в виде степени:

$$y^{1,7} \cdot y^{2,8} \cdot y^{-1,5}.$$

1) y^{-3} ; 2) $y^{-7,14}$; 3) y^3 ; 4) y^6 .

5. Упростите выражение: $b^{-0,2} : b^{-0,7}$.

1) $\sqrt{b}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{b}}$; 3) $b^{-0,9}$; 4) $b^{\frac{2}{7}}$.

(продолжение).

6. Упростите выражение: $(a^{-1,5})^{\frac{2}{3}}$.

- 1) a ; 2) $a^{-\frac{5}{6}}$; 3) $a^{\frac{5}{6}}$; 4) $\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

7. Найдите значение выражения: $\left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

- 1) $\frac{5}{6}$; 2) $1,2$; 3) $\frac{36}{125}$; 4) $\frac{6}{25}$.

8. Найдите значение выражения: $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$.

- 1) -4 ; 2) 9 ; 3) -5 ; 4) 5 .

9. Сократите дробь:

- 1) $\frac{x^{11}}{x^{11}-1}$; 2) $\frac{x^{11}+1}{x^{11}}$; 3) $\frac{1}{x^{11}}$; 4) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}} \cdot \frac{x^{11}-1}{x^{11}}$.

10. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

при $x = 0,0625$

- 1) $0,5$; 2) 2 ; 3) 4 ; 4) $0,25$.

(продолжение)

11. Вычислите: $-24 \cdot 125 \cdot \frac{1}{39}$. 1) -1139 ; 2) -159 ; 3) -81 ; 4) 81 .

12. Вычислите: $4,7 - 8 \cdot 2^3$. 1) $-11,3$; 2) $5,3$; 3) $-7,3$; 4) $11,3$.

13. Вычислите: $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{36}}$. 1) 1 ; 2) 2 ; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14. Вычислите: $\frac{(0,216^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{2}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$.
1) $0,04$; 2) $0,4$; 3) 4 ; 4) $0,16$.

15. Вычислите: $18 \cdot 27^{-\frac{2}{3}} - 0,4$. 1) $1,6$; 2) $161,6$; 3) $2,6$; 4) $5,6$.

16. Упростите выражение $\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y} + 2\sqrt{y}$.

1) $1 + \sqrt{y}$; 2) $1 + 2\sqrt{y}$; 3) $2\sqrt{y} - 1$; 4) $(1 - \sqrt{y})^2$.

17. Упростите выражение:

1) -4 ; 2) 4 ; 3) $-2a^{\frac{1}{3}}$; 4) 0 .

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$$

18. Вычислите: $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.
1) 2 ; 2) $2\frac{1}{2}$; 3) 3 ; 4) $1\frac{1}{2}$.

(продолжение)

19. Найдите значение выражения $\left(0,216^{\frac{8}{27}}\right)^{\frac{9}{4}}$.
- 1) 0,36; 2) 3,6; 3) 0,6; 4) 0,18.
20. Вычислите: $0,064^{\frac{1}{6}} \cdot 0,16^{\frac{1}{4}}$. 1) 0,04; 2) 0,4; 3) 0,2; 4) 0,8.
21. Вычислите: $9^{-\frac{3}{2}} - (5^0)^3 \cdot 3 + (0,01)^{-0,5} - 9 \cdot 3^{-3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}$.
- 1) 13; 2) 7; 3) 3; 4) .
22. Вычислите: $5 \cdot 25^{0,5} \cdot \sqrt{2}$. 1) 8; 2) 23; 3) 123; 4) $\sqrt{125} \cdot 2$.
23. Вычислите: $24 \cdot 16^{\frac{2}{3}} \cdot 6$. 1) 0; 2) 6; 3) 42; 4) 90.
24. Вычислите: $\frac{35}{25^{\frac{1}{2}}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$.
- 1) $\frac{28}{5}$; 2) 1; 3) 3,5; 4) 14.
25. Вычислите: $2^3 \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^2 + 1,25$.
- 1) $1\frac{9}{32}$; 2) 2,5; 3) 3,75; 4) 1,25.
26. Вычислите: $\frac{1}{(5 \cdot 4)^{-2}} - \frac{1}{(2 \cdot 10)^{-2}}$.
- 1) -63; 2) 63; 3) $-\frac{25}{1296}$; 4) 0.

(продолжение).

27. Вычислите: $2 \cdot \left(\frac{1}{64^{-\frac{1}{3}}} \right)^{+0,8}$.

- 1) 1,3; 2) 5,2; 3) 8,8; 4) 16,8.

28. Упростите выражение: $a^{\frac{1}{4}} : a^{-0,75}$.

- 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $a^{-\frac{1}{2}}$; 4) a .

29. Упростите выражение: $a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{6}{7}}$.

- 1) $a^{\frac{9}{14}}$; 2) $a^{-\frac{9}{14}}$; 3) $a^{\frac{9}{7}}$; 4) $a^{\frac{7}{4}}$.

30. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{3^{\frac{1}{p}}}$ при $p = \frac{1}{2}$.

- 1) 0; 2) 1; 3) 9; 4) 3.

31. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^{-\frac{1}{4p}} \cdot 2}$ при $p = -$.

- 1) 9; 2) $\frac{1}{3^4}$; 3) 3^{20} ; 4) 81.

32. Найдите наименьшее число:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 2) $2^{-\frac{1}{2}}$; 3) $1^{-\frac{1}{2}}$; 4) $4^{-\frac{1}{2}}$.

Тренировочный тест (ответы).

№ воп роса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Отв ет	3	1	4	3	1	4	2	3	4	1	2	1	3	3	1	1

№ воп роса	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Отв ет	2	1	1	2	2	2	4	3	3	4	3	4	2	4	4	4

Используемая литература

- Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. Москва. «Просвещение» 2010г.
- Журнал «Математика. Первое сентября» № 19, 2008г., «Подготовка к ЕГЭ».
- Сборники для подготовки к ЕГЭ по математике.
- Интернет – ресурс. Сайт <http://www.mathege.ru>. Открытый банк задач по математике.
- Тест по теме «Свойства степени с рациональным показателем»:
<http://ov1098.jimdo.com/%D1%83%D1%87%D0%B0%D1%89%D0%B8%D0%BC%D1%81%D1%8F/11-%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81-%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D1%8B/>