

Способы решения тригонометрических уравнений

- Уравнения , приводимые к квадратным уравнениям
- Однородные уравнения
- Разложение на множители
- Замена переменной
- Метод вспомогательного угла
- Понижение степеней

уравнения, приводимые к квадратным уравнениям

$$2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$2*(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$$

$$\text{Пусть } a = \sin x$$

$$-2a^2 + a + 3 = 0$$

$$a_1 = -1, a_2 = 1,5$$

$$\sin x = -1 \quad \sin x = 1,5$$

$$x = -\pi/2 + 2\pi n, \quad \text{нет корней}$$



Однородные уравнения

$$3\sin^2x + \sin x \cos x = 2\cos^2x$$

Делим на $\sin^2x$ обе части уравнения

$$3 + \cos x / \sin x = 2\cos^2x / \sin^2x$$

Известно, что $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$

$$\text{Получим } 3 + \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg}^2x$$

Пусть $a = \operatorname{ctg} x$

$$3 + a = 2a^2$$

$$2a^2 - a - 3 = 0$$

$$a_1 = 1,5 \quad a_2 = -1$$

Получим $\operatorname{ctg} x = 1,5 \quad \operatorname{ctg} x = -1$

$$x = \operatorname{arccotg} 1,5 + \Pi n \quad x = 3\Pi/4 + \Pi m$$

Разложение на множители

$$4\sin^2 x - \sin 2x = 0$$

$$4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$2\sin x(2\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } 2\sin x - \cos x = 0$$

$$x_1 = \pi n \quad \frac{2\sin x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$2 - \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\operatorname{ctg} x = 2$$

$$x_2 = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k$$



Замена переменной

$$2(1+\operatorname{tg}x) - \frac{3}{1+\operatorname{tg}x} = 5$$

Пусть $y=1+\operatorname{tg}x$

$$2y - \frac{3}{y} = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y^2 - 3 = 5y \\ y \neq 0 \end{array} \right.$$

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -0,5$$

$$1 + \operatorname{tg}x = 3$$

$$\operatorname{tg}x = 2$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \Pi n$$

$$1 + \operatorname{tg}x = -0,5$$

$$\operatorname{tg}x = -1,5$$

$$x_2 = -\operatorname{arctg} 1,5 + \Pi k$$

Метод вспомогательного угла

$$\cos 3x + \sin 3x = 1$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Делим обе части уравнения на $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пусть $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$, $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$

$$\cos \varphi \cos 3x + \sin \varphi \sin 3x = 1/\sqrt{2}$$

$$\cos(3x - \varphi) = 1/\sqrt{2}$$

$$3x - \varphi = \pm \pi/4 + 2\pi n$$

$$3x = \pm \pi/4 + \varphi + 2\pi n,$$

$$x = \pm \pi/12 + \pi/12 + 2\pi n/3$$



Понижение степеней

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1/2$$

$$(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = 1/2$$

Известно, что $\sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos x}{2}$, $\cos^2(x/2) = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = 1/2$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 2$$

$$2\cos^2 x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \pi/2 + \pi n$$