

Системы счисления



История возникновения счета

Счет появился тогда, когда человеку потребовалось информировать своих сородичей о количестве обнаруженных им предметов. В разных местах придумывались разные способы передачи численной информации: от зарубок по числу предметов до хитроумных знаков - цифр. Во многих местах люди стали использовать для счета пальцы. Одна из таких систем счета и стала общеупотребительной – десятичная.

Система счисления

Система счисления – это способ записи чисел по определенным правилам с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

523

1010011

CXL

Цифры:

0, 1, 2, 3, ...

0,1

I, V, X, L, ...

Знаки (символы), используемые в СС для обозначения чисел, называются **цифрами**.

Алфавит – это набор **цифр**. $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Типы систем счисления

Типы систем счисления

```
graph TD; A[Типы систем счисления] --> B[Позиционные]; A --> C[Непозиционные]; B --> D[значение цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа;]; C --> E[значение цифры не зависит от ее места (позиции) в записи числа;];
```

Позиционные

значение цифры **зависит** от ее места (*позиции*) в записи числа;

Непозиционные

значение цифры **не зависит** от ее места (*позиции*) в записи числа;

Позиционные системы счисления

Значение цифры зависит от ее **позиции**, т.е. одна и та же цифра соответствует разным значениям в зависимости от того, в какой позиции числа она стоит.

Десятичная система



Позиционные системы счисления

Основание системы счисления (N) - количество цифр (знаков), используемых для представления чисел

Основание	Алфавит	Пример
Двоичная система счисления		
N=2	0, 1	1001011 2

Четверичная система счисления

N=4	0, 1, 2, 3	2301 4
-----	------------	------------------

Позиционные системы счисления

Основание

Алфавит

Пример

Восьмеричная система счисления

$N=8$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

527

8

Шестнадцатеричная система счисления

$N=16$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

10 11 12 13 14 15

2F5₁

16

Решение задач

В каких системах счисления записаны числа?

2593_{10} , 110101_2 , 207_8 , $5C_{16}$

Найти ошибки в записи чисел в различных С.С.

231_4 7352_8 ~~284_8~~ ~~2154_4~~

10111_2 ~~1002011_2~~ ~~508_{12}~~

Решение задач

Какое минимальное основание должна иметь С.С.,
если в ней могут быть записаны числа

312_?

1012_?

6720_?

790_?

1000_?

3440_?

2F1_?

A19_?

Соответствие между числами в различных системах счисления

10-ая	2-ая	8-ая	16-ая
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11

Соответствие систем счисления

Десятичная	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичная	0	1	10	11	100	101	110	111
Восьмеричная	0	1	2	3	4	5	6	7
Шестнадцатеричная	0	1	2	3	4	5	6	7

Десятичная	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Двоичная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
Восьмеричная	10	11	12	13	14	15	16	17	20
Шестнадцатеричная	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Перевод чисел из 10-й СС в 2-ю СС

Правила перевода

- ✓ Разделить десятичное число на 2. Получится частное и остаток.
- ✓ Частное опять разделить на 2. Выполнять деление до тех пор, пока последнее частное не станет меньше 2.
- ✓ Записать последнее частное и все остатки в обратном порядке. Полученное число и будет двоичной записью исходного десятичного числа.

Перевод чисел из 10-й СС в 2-ю СС

$$57_{10} \rightarrow X_2$$

57		2						
56		28		2				
		28		14		2		
1				14		7		2
		0				6		3
				0				2
						1		1
								1
								1

ываем выделенные
в обратном порядке

Записываем выделенные
остатки в обратном порядке

Ответ:

$$57_{10} = 111001_2$$

Перевод чисел из 10-й СС в 8-ю СС

$$100_{10} \rightarrow X_8$$

100		8		
96		12		8
		8		
				1
4		4		

Записываем выделенные
остатки в обратном порядке

Ответ:

$$100_{10} = 144_8$$

Перевод чисел из 10-й СС в 16-ю СС

Основание (количество цифр): **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15

$$335_{10} \rightarrow X_{16}$$

335		16		
320		20		16
		16		
				1
				4

F ← **15**

Записываем выделенные
остатки в обратном порядке

Ответ:

$$335_{10} = 14F_{16}$$

Решение задач

В двоичную систему:

$$185_{10} = 10111001_2$$

185		2						
184		24	2					
1		24		12	2			
		0		12	6	2		
				0	6		3	2
					0		2	1
							1	

В четверичную систему:

$$78_{10} = 1032_4$$

78		4			
76		19		4	
2		16		4	4
		3		4	1
				0	

Решение задач

Восьмеричная система:

$$75_{10} = 113_8$$

$$132_{10} = 204_8$$

$$279_{10} = 427_8$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 8 \\ \hline 72 & 9 \\ \hline 3 & 8 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 132 & 8 \\ \hline 128 & 16 \\ \hline 4 & 16 \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 279 & 8 \\ \hline 272 & 34 \\ \hline 7 & 32 \\ & 2 \end{array}$$

Решение задач

Шестнадцатиричная система:

$$107_{10} = 6B_{16}$$

$$250_{10} = FA_{16}$$

$$721_{10} = 2D1_{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{11} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 250 & 16 \\ \hline 240 & \mathbf{15} \\ \hline \mathbf{10} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 721 & 16 \\ \hline 720 & 45 \\ \hline \mathbf{1} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 16 \\ \hline 32 & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{13} & \end{array}$$

Перевод в десятичную СС

Любое позиционное число можно представить в виде суммы степеней основания системы.

Формы записи
числа

Свернутая

Развернутая

$$\begin{aligned} 275_1 &= 2 * 100 + 7 * 10 + 5 * 1 = \\ 0 &= 2 * 10^2 + 7 * 10^1 + 5 * 10^0 \end{aligned}$$

Решение задач

Запишите числа в развернутой форме:

$$2593_{10}, 110101_2, 207_8, 5C_{16}$$

Запишите числа в свернутой форме:

$$1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0 =$$

$$7*10^2+3*10^1+1*10^0 =$$

$$3*8^1+3*8^0 =$$

$$14*16^1+5*16^0 =$$

Перевод из 2-ой в 10-ую СС

Для перехода из двоичной системы счисления в десятичную необходимо двоичное число представить в виде суммы степеней двойки и найти ее десятичное значение.

Разряд цифры

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & = & 1 * 2^3 & + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = \\ & & & & & & = 8 + 4 + 1 = 13 \end{array}$$

Основание системы

Решение задач

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 16 + 2 + 1 = 19_{10}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} = 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^4 +$$
$$+ 1 * 2^3 + 1 * 2^2 =$$
$$= 128 + 64 + 16 + 8 + 4 = 220_{10}$$

Перевод из 8-ой в 10-ую СС

$$\overset{1}{7}\overset{0}{1}_8 = 7 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 56 + 1 = 57_{10}$$

$$\overset{2}{1}\overset{1}{4}\overset{0}{4}_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = \\ = 64 + 32 + 4 = 100_{10}$$

$$215_8 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = \\ = 2 \cdot 64 + 8 + 5 = 141_{10}$$

Перевод из 16-ой в 10-ую СС

$$\begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ 7A_{16} \end{array} = 7 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 112 + 10 = 122_{10}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 0 \\ 2C6_{16} \end{array} = 2 \cdot 16^2 + \text{C} \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 512 + 192 + 6 = 710_{10}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 0 \\ 1C5_{16} \end{array} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 256 + 192 + 5 = 453_{10}$$
$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 0 \\ 1D4_{16} \end{array} = 1 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 256 + 208 + 4 = 468_{10}$$

Задание. Перевести в 10-ю СС

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$

$$75_8 =$$

$$134_8 =$$

$$765_8 =$$

$$12031_4 =$$

$$2643_8 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$22B_{16} =$$

$$A35_{16} =$$

$$2FE1_{16} =$$

Домашнее задание

Переведите числа из одной системы счисления в другую.

a) $71_8 \rightarrow X_{10} \rightarrow X_2;$

b) $5E_{16} \rightarrow X_{10} \rightarrow X_8;$

c) $11010_2 \rightarrow X_{10} \rightarrow X_{16};$

d) $AF_{16} \rightarrow X_{10} \rightarrow X_2$

Домашнее задание

1. Для каждого из чисел: 123_{10} , 456_{10} выполнить перевод: $10 \rightarrow 2$, $10 \rightarrow 8$, $10 \rightarrow 16$.
2. Для каждого из чисел: 100011_2 , 101001011_2 , 1110010001_2 выполнить перевод: $2 \rightarrow 10$, $2 \rightarrow 8$, $2 \rightarrow 16$.
3. Для чисел: 54321_8 , 54525_8 , 777_8 , $1AB_{16}$, $A1B_{16}$, $E2E4_{16}$, $E7E5_{16}$ выполнить соответствующий перевод: $8 \rightarrow 2$, $16 \rightarrow 2$.

Перевод дробных чисел в десятичную с.с.

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1, & 1 & 1 & _2 \end{array} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} =$$
$$= 8 + 1 + 0,5 + 0,25 = 9,75_{10}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1, & 0 & 1 & 1 & _2 \end{array} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} =$$
$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375_{10}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3, & 2 & 0 & 1 & _4 \end{array} = 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} + 1 \cdot 4^{-3} =$$
$$= 64 + 3 + 0,5 + 0,015625 =$$
$$= 67,515625_{10}$$

Перевод правильной десятичной дроби из десятичной системы счисления

Алгоритм перевода:

1. Последовательно умножать десятичную дробь и получаемые дробные части произведений на основание новой системы счисления до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю или не будет достигнута необходимая точность перевода.
2. Полученные целые части произведений выразить цифрами алфавита новой системы счисления.
3. Записать дробную часть числа в новой системе счисления начиная с целой части первого произведения.

Перевод дробных чисел $10 \rightarrow 2$

$$105,25_{10} = 105 + 0,25 = 1101001,01_2$$

$$105_{10} = 1101001_2$$

Перевод дробной части числа из десятичной СС в другую позиционную СС выполняется последовательным умножением на основание системы, пока дробная часть не станет равна 0.

$$0,25_{10} = 0,01_2$$

0	,25	×	2
0	,5	×	2
1	,0		

Перевод дробных чисел $10 \rightarrow 2$

$$25,375 = 11001,011_2$$

0		375	×	2
0		750	×	2
1		5	×	2
1		0		

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

$$0,7 = 0,101100110\dots = 0,1(0110)_2$$

Перевод дробных чисел $10 \rightarrow 4$

$$180,65625_{10} \rightarrow x_4$$

$$233,875_{10} = ?_4$$

$$180_{10} \rightarrow 2310_4$$

$$\begin{array}{r|l} 0,65625 & \times 4 \\ \hline 2,625 & \times 4 \\ 2,5 & \times 4 \\ 2,0 & \end{array}$$

$$180,65625_{10} \rightarrow 2310,222_4$$

Арифметические операции

сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=\textcolor{red}{1}0_2$$

$$1+1+1=\textcolor{red}{1}1_2$$

перенос

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0_2 \\ \hline \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} \\ 1_2 \end{array}$$

вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad \textcolor{red}{1}0_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \textcolor{red}{1}0_2 \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1}0_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ \hline - \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{0} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{0} \\ 1_2 \end{array}$$

Арифметические операции

$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ + 10110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ - 1101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011101_2 \\ - 110111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

сложение

• • •

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040 \end{array}$$

8

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} 3472_8 \\ + 4520_8 \\ \hline \end{array}$$

8

$$\begin{array}{r} 10321_4 \\ + 2030_4 \\ \hline \end{array}$$

4

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

ВЫЧИТАНИЕ

• •

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157 \end{array}$$

8

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} 725_8 \\ - 374_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 D} \end{array}$$

9_{16}

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13} \text{ 9} \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = \text{16} + 9$$

$$5 + 7 + \text{1} = \text{13} = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = \text{16} + 6$$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \text{ B A}_{16} \\ + 8 5 6_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D} \end{array}$$

D_{16}

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \\ \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } 13 \end{array}$$

заем

$$(11 + \mathbf{16}) - 14 = \mathbf{13} = \text{D}_{16}$$

$$(5 - \mathbf{1}) + \mathbf{16} - 7 = \mathbf{13} = \text{D}_{16}$$

$$(12 - \mathbf{1}) - 10 = 1$$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} 10 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A } 5 \text{ 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические действия

умножение

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 1_2 \\ \hline 1010 \\ + 1010 \\ \hline 10010 \end{array}$$

1010
× 1010

1010
1010

10010

$$\begin{array}{r} 2013_4 \\ \times 21_4 \\ \hline 2013_4 \\ + 10032_4 \\ \hline 102333_4 \end{array}$$

2013₄
× 21₄

2013₄
+ 10032₄

102333₄

Арифметические действия

умножение

$$\begin{array}{r} 725_8 \\ \times 14_8 \\ \hline 3524_8 \\ + 725_8 \\ \hline 12774_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3A2_{16} \\ \times 31_{16} \\ \hline 3A2_{16} \\ + AE6_{16} \\ \hline B202_{16} \end{array}$$