

Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

Системы счисления

Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

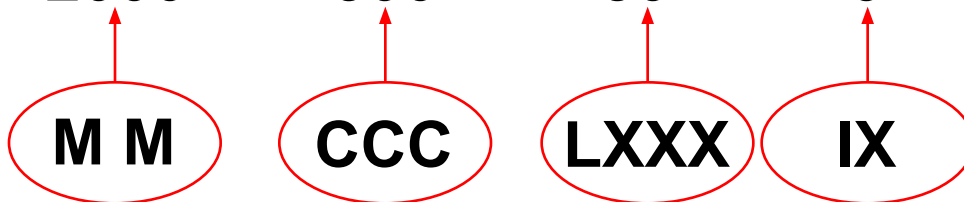
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{М М С С С L X X X I X}$$

Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + CLXXIV = ?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «*Пираты XX века*»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)



Часы
Суздальского
Кремля

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

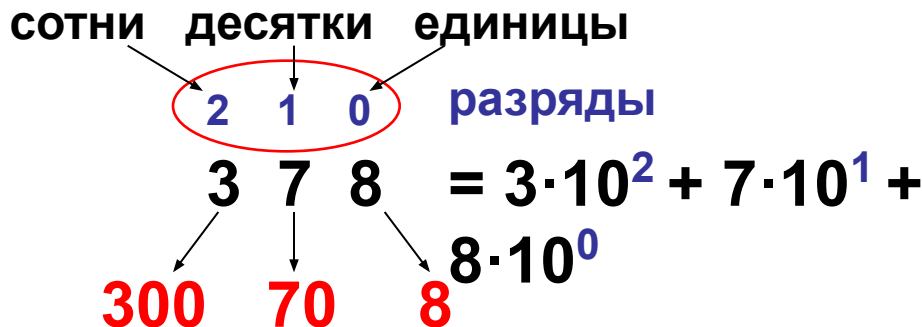
Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10



Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Системы счисления

Тема 2. Двоичная система счисления

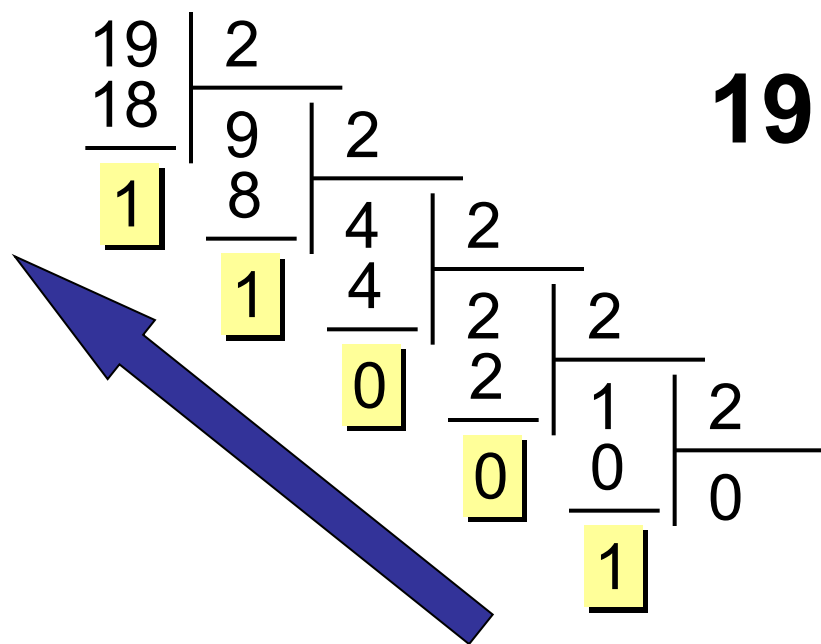
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + \\ &\quad 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 2 + 1 = 19 \end{aligned}$$

Примеры:

131 =

79 =

Примеры:

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

Метод подбора

77 **10 → 2**

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна данному

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$77 = 64 + 13 + 5 + 1$$

Разложение по степеням двойки:

$$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$77 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$77 = \begin{matrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \text{разряды} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{matrix}$$

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011_2$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,750 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ \hline \end{array}$$

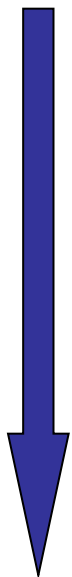
$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,50 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,0 \\ \hline \end{array}$$



$$0,7 = ?$$

$$0,7 = 0,101100110...$$

$$= 0,1(0110)_2$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

Примеры:

0,625 =

3,875 =

Арифметические операции

сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=\textcolor{red}{1}0_2$$

$$1+1+1=\textcolor{red}{1}1_2$$

перенос

■ ■ ■ ■ ■

$$\begin{array}{r} 10110_2 \\ + 111011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1010001$$

2

вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad \textcolor{red}{1}0_2-1=1$$

заем

■

■

$$\begin{array}{r} 0110_2 \\ - 0101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1}0\cancel{0}0\cancel{1}01_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

-

$$11011_2$$

$$\textcolor{red}{0}101010$$

2

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ - 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \bigg| 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы

-  нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
 - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
 - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.
-
-  простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
 - двоичные числа имеют **много разрядов**;
 - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

Двоично-десятичная система

BCD = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024,19 = 1001 \text{ } 0000 \text{ } 0010 \text{ } 0100, 0001 \text{ } 1001_{\text{BCD}}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1 \text{ } 0101 \text{ } 0011, 0111 \text{ } 1_{\text{BCD}} =$$
$$0001 \text{ } 0101 \text{ } 0011, 0111 \text{ } 1000_{\text{BCD}} = 153,78$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = 15,8$$
$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = 21,5$$

Системы счисления

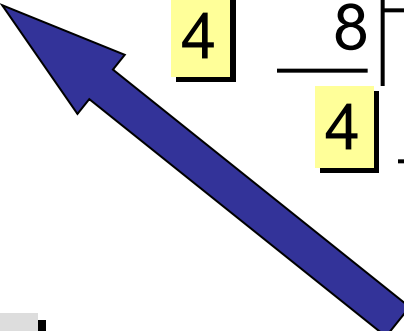
Тема 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8



100		8
96		12
4		8
		8
		1
		0
		0
		1

$$100 = 144_8$$

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100 \end{aligned}$$

Примеры:

$$134 =$$

$$75 =$$

$$134_8 =$$

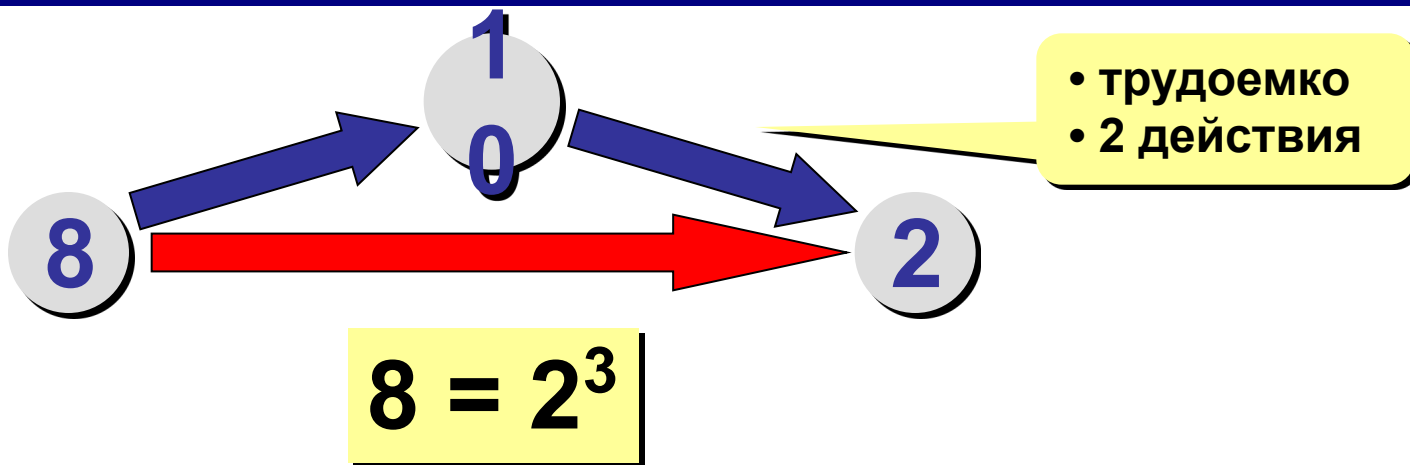
$$75_8 =$$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

Примеры:

$$3467_8 =$$

$$\cancel{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = \mathbf{8} + 0$$

1 в перенос

$$5 + 6 + \mathbf{1} = 12 = \mathbf{8} + 4$$

1 в перенос

$$1 + 6 + \mathbf{1} = \mathbf{8} = \mathbf{8} + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$
$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

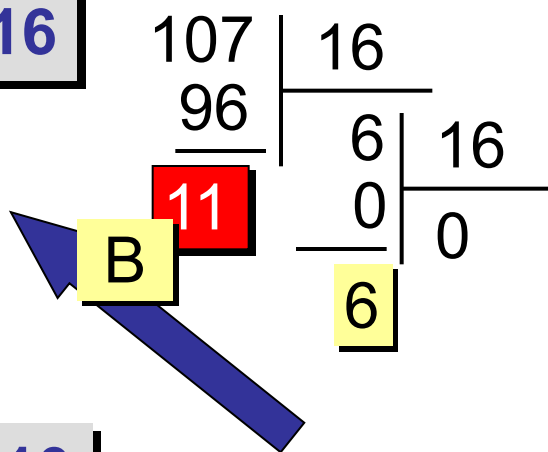
Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15

10 → 16



$$107 = 6B_{16}$$

система
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

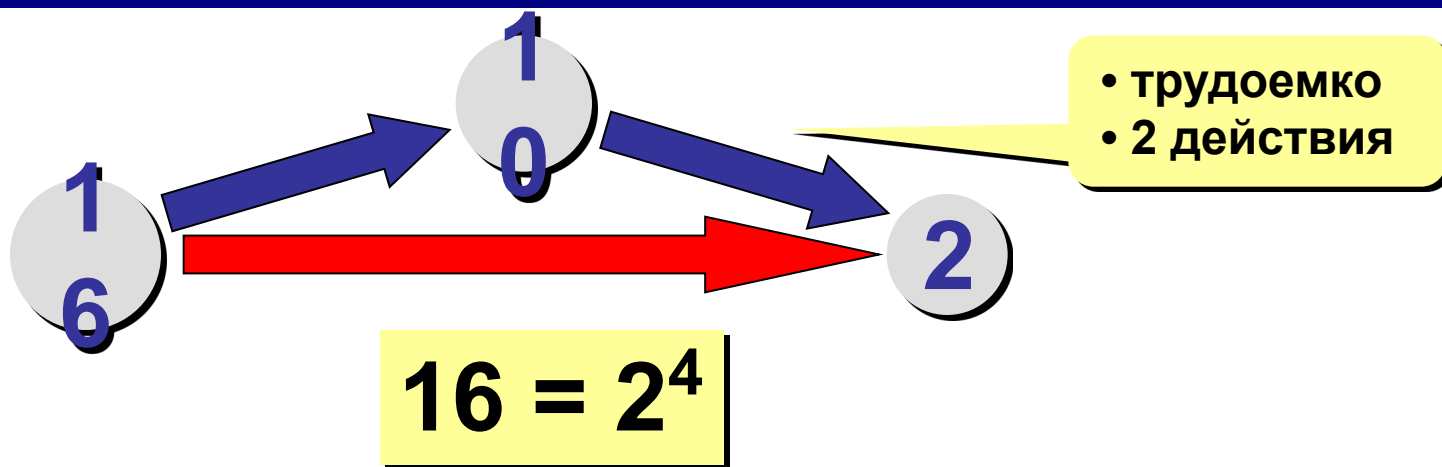
$$22B_{16} =$$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



! Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры:

$$\text{C73B}_{16} =$$

$$\text{2FE1}_{16} =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

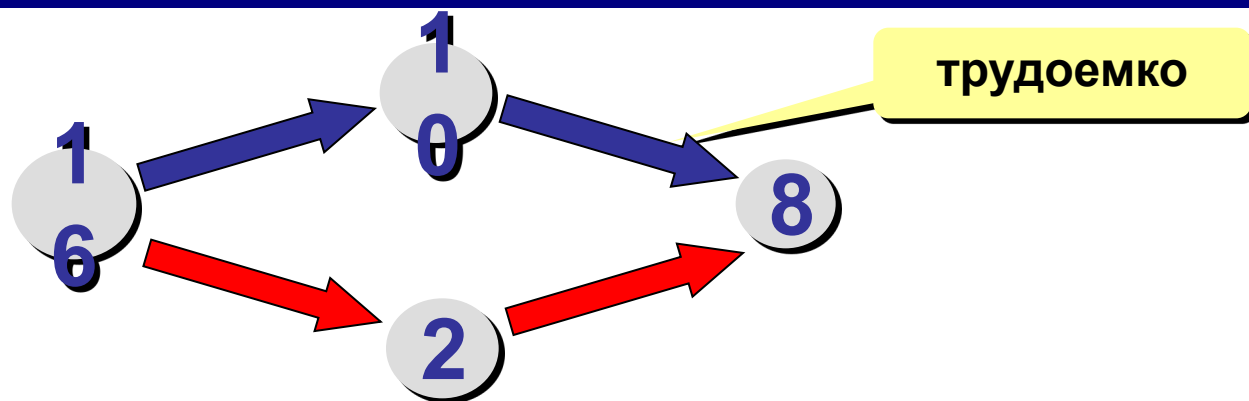
Примеры:

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13} \text{ 9} \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = \text{16} + 9$$

$$5 + 7 + \text{1} = \text{13} = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = \text{16} + 6$$

Пример:

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 5 \ 11 \\ - 10 \ 7 \ 14 \\ \hline 1 \ 13 \ 13 \end{array}$$

заем

заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

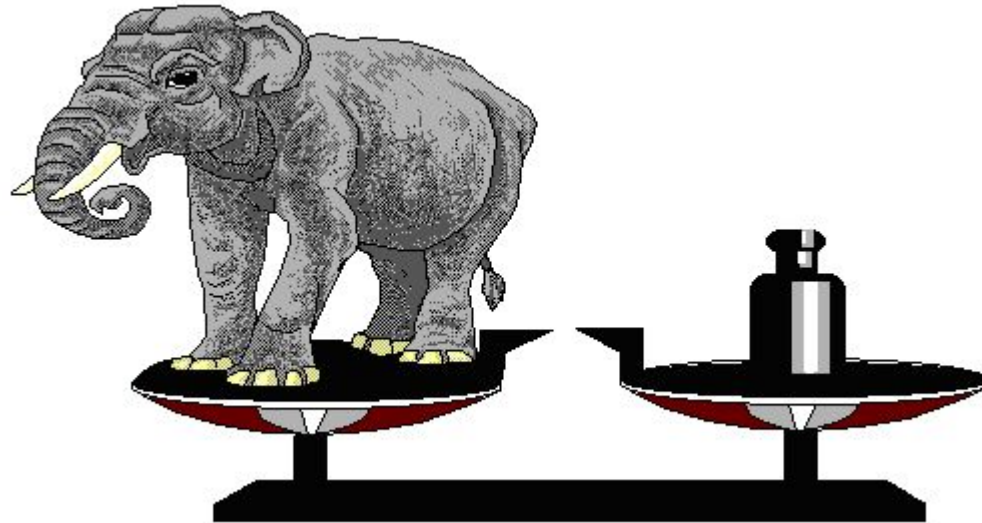
Пример:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

Тема 5. Другие системы счисления

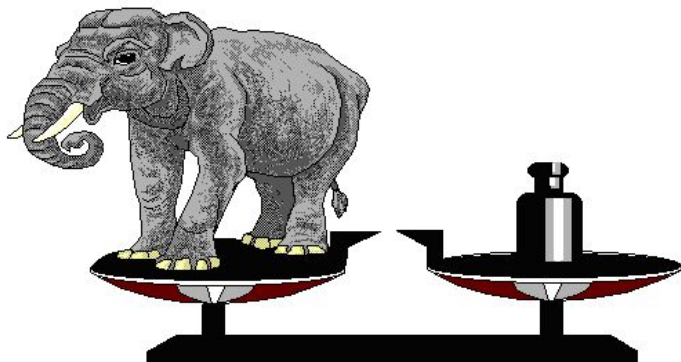
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
– 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1_{зур} = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов

! Троичная система!

Конец фильма
