

От автора.

Это небольшое пособие хочу предложить ребятам одиннадцатиклассникам для того, чтобы разобраться с решением неравенств с параметрами при определенном условии, упорядочить свои знания . Данная тема считается довольно сложной. Ее изучение идет на элективных курсах. Но ребятам, кто не может по каким – то причинам посещать эти курсы и считает себя достаточно сильным, чтобы разобраться в этой теме самим , я предлагаю мое пособие.

Здесь представлен алгоритм решения таких заданий и методические рекомендации по их выполнению». Рекомендую всем

11-классникам прочесть это пособие. Оно поможет вам разобраться с данным материалом, сэкономить свое время и проверить свои знания по данной теме.

Вместе с пособием прилагаются электронные тесты.

- При подготовке к ЕГЭ становится необходимостью изучать некоторые темы раздела курса «Алгебры и начала анализа» самостоятельно, так как в школьном курсе их не изучают вообще или затрагивают вскользь.
- Данная работа предназначена для самостоятельного изучения учащимися темы «решения неравенств первой и второй степени с параметрами при определенном условии»
- Работа написана на основе анализа материалов ЕГЭ по математике за последние годы. Данная тема содержит ключевые моменты теории (определения, основные понятия, формулы и. т. д.), описание методики решения типичных задач и некоторое количество подробно разобранных примеров.
- Нельзя дать универсальных указаний по решению задач с параметрами. Но для неравенств первой и второй степени с параметрами при заданном условии можно рекомендовать использовать **графический метод** решения, как более наглядный. При этом можно наглядно рассмотреть задачи, включающие несколько возможных случаев. Данный способ решения можно считать универсальным, так как он подходит для всех заданий такого типа.
- В самоучителе представлен алгоритм решения заданий для того, чтобы наиболее четко видеть «путь» решения. К пособию прилагаются тесты с электронной обработкой, созданные в программе Excel.

Оглавление

- От автора
- Исходные понятия.
- Решение неравенств 1 степени с параметрами при определенном условии
- Решение неравенств 2 степени с параметрами при определенном условии
- Демонстрационные тесты.

Как понять «неравенства с параметрами» ???



Исходные понятия

Вспомним задачу нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ через его коэффициенты a, b, c , где $a \neq 0$. Рассматривая a, b, c как числа, выделяем полный квадрат $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$ и получаем равенство $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Теперь рассуждаем так: поскольку квадрат любой величины неотрицателен, в случае, когда $b^2 - 4ac < 0$, последнее уравнение корней не имеет; в случае же, когда $b^2 - 4ac \geq 0$, получаем корни $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Следовательно, знак величины $D = b^2 - 4ac \geq 0$, называемой дискриминантом, является определяющим для решения нашего квадратного уравнения: если $D < 0$, то уравнение корней не имеет; если $D \geq 0$, то корни существуют и находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Так вот, оказывается, что рассмотренная задача — это типичная задача с параметрами, в которой требуется для каждого набора значений коэффициентов-параметров a, b, c , где $a \neq 0$, решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Истина не передается —
она добывается.

В. Ф. Одоевский



Определение. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется линейной функцией.

Графиком линейной функции является прямая с углом наклона к оси абсцисс равным β , где $\operatorname{tg} \beta = k$. Если $k > 0$, то угол β острый; если $k < 0$, то угол β тупой; если $k = 0$, то график либо совпадает с осью абсцисс, либо параллелен ей.

Неравенства с параметрами

ВИД 1

$$kx + b > 0$$

$$kx + b < 0$$

$$kx + b \geq 0$$

$$kx + b \leq 0$$

ВИД 2

$$\frac{f_1}{f_2} > 0$$

$$\frac{f_1}{f_2} < 0$$

$$\frac{f_1}{f_2} \geq 0$$

$$\frac{f_2}{f_1} \leq 0$$

f_1 и f_2 - линейные функции

Блок – схема алгоритма решения неравенств

начало

+

Записать
неравенство

Выделить
интервал

неравенство
вида 2

-

+

Случай, $k > 0$

1 случай
 $f_1(x) > 0$
 $f_2(x) < 0$

Случай, $k < 0$

2 случай
 $f_1(x) < 0$
 $f_2(x) > 0$

Случай, $k = 0$

Совокупность
решений

КОНЕЦ

- **Задача 1.** При каких значениях k неравенство $(k - 4)x + k - 5 < 0$ справедливо для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < 3$?

Решение.

Пусть $f(x) = (k - 4)x + k - 5$. $f(x) < 0$; $k - ?$

Случай, $k > 0$

$$\begin{cases} f(-3) < 0, \\ f(3) < 0, \\ k - 4 > 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(-3) = -3k + 12 + k - 5 = 7 - 2k, \\ f(3) = 3k - 12 + k - 5 = 4k - 17 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

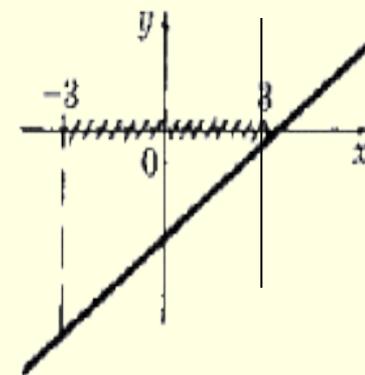
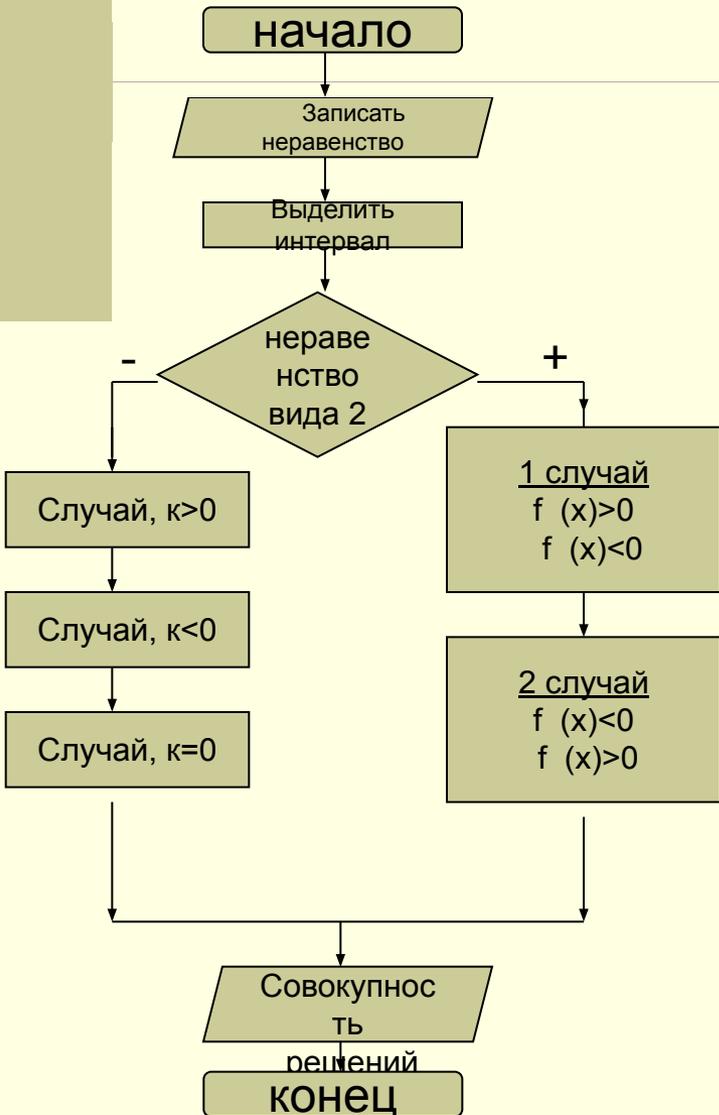


Рис. 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k + 7 < 0, \\ 4k - 17 < 0, \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 3,5, \\ k < 4,25, \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < k < 4,25.$$



Блок – схема



Случай, $k < 0$

$$\begin{cases} f(-3) < 0, \\ f(3) < 0, \\ k - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k + 7 < 0, \\ 4k - 17 < 0, \\ k < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

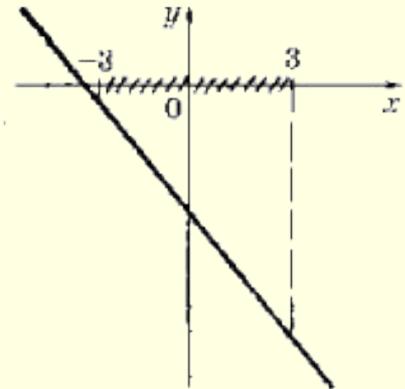


Рис. 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 3,5, \\ k < 4,25, \\ k < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3,5 < k < 4.$$

Случай, $k = 0$

$$\begin{cases} k - 5 < 0, \\ k - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k < 5, \\ k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4.$$

Ответ: $3,5 < k < 4,25$.

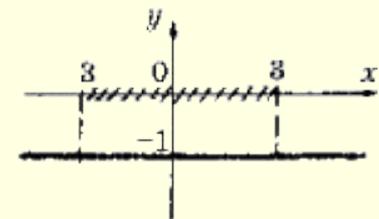


Рис. 3

Истина не передается-
она добивается.
В.Ф. Одоевский



Задача 2. Найти все значения a , при которых для всех x , удовлетворяющих условию

$|x| < 1$, справедливо неравенство

$$\frac{2x + a + 9}{x^2 + (2 - a)x - 2a} < 0.$$

Решение.

Упростим

$$x^2 + (2 - a)x - 2a = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a - 2 \pm \sqrt{4 + 4a + a^2} \right) = \frac{a - 2 \pm (2 + a)}{2},$$

$$x_1 = a, \quad x_2 = -2.$$

$$\frac{2x + a + 9}{(x + 2)(x - a)} < 0. \text{ Но } x + 2 > 0 \text{ на } [-1; 1], \text{ поэтому}$$

$$\frac{2x + a + 9}{x - a} < 0 \text{ (рис. 4, 5).}$$

1 случай

Пусть $f_1(x) = 2x + a + 9$ и $f_2(x) = x - a$.

$$\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a + 9 > 0, \\ x - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(-1) > 0, \\ f_2(1) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(-1) = a + 7, \\ f_2(1) = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 7 > 0, \\ 1 - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

2 случай

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a + 9 < 0, \\ x - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(-1) > 0, \\ f_1(1) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(-1) = -1 - a, \\ f_1(1) = a + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - a > 0, \\ a + 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -11.$$

Ответ: $a < -11; a > 1$.

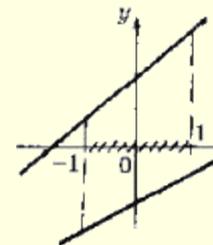


Рис. 4

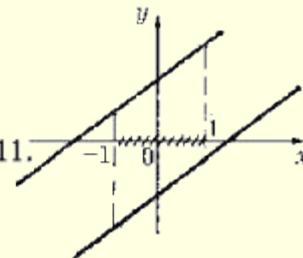


Рис. 5

начало

Записать
неравенство

Выделить
интервал

нераве
нство
вида 2

Случай, $k > 0$

Случай, $k < 0$

Случай, $k = 0$

1 случай
 $f_1(x) > 0$
 $f_2(x) < 0$

2 случай
 $f_1(x) < 0$
 $f_2(x) > 0$

Совокупнос
ть
решений

КОНЕЦ

Решение неравенств второй степени

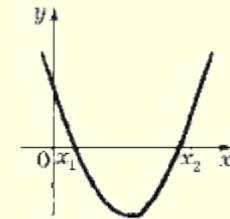


Рис. 6

Определение. Функция, задаваемая формулой $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратичной функцией.

График квадратичной функции имеет вид, изображенный на рис. 6, и называется параболой. Точка графика с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$ называется вершиной параболы, ордината этой точки равна

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

При $a > 0$ «ветви» параболы направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Каждый из этих двух случаев разбивается на три подслучая в зависимости от числа корней уравнения.

При $D = b^2 - 4ac > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня

При $D = 0$ уравнение имеет один корень, задаваемый и в том числе формулой (1).

При $D < 0$ уравнение не имеет действительных корней.

Рассмотрим расположение графика по отношению к оси абсцисс во всех шести случаях (рис. 7).

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

Рис. 7



Алгоритм решения неравенств второй степени (в частности см. задачу 1)

- Записать неравенство
- Выделить интервал, на котором будет рассматриваться решение данного неравенства
- Вычислить дискриминант, значение функции на концах интервала (т.е. D , $f(-2)$, $f(1)$ см. задачу 1)
- Рассмотреть всевозможные случаи расположения графиков для данного неравенства (случаев может быть разное количество)
- Составить систему неравенств для каждого случая, для этого рассмотреть :
 - 1) коэффициент перед x^2
(в данном случае m , см. задачу 1)
 - 2) дискриминант
 - 3) значения функций на концах интервала
- Решить системы неравенств
- В итоге записать совокупность решения систем каждого случая

Задача 1. При каких значениях m неравенство $mx^2 - 2(m+3)x + m < 0$ верно при всех x , удовлетворяющих условию $-2 \leq x \leq 1$?

Решение.

Пусть $f(x) = mx^2 - 2(m+3)x + m$. Тогда

$$\frac{D}{4} = (m+3)^2 - m^2 = 6m + 9 = 3(2m+3),$$

$$f(-2) = 4m + 4(m+3) + m = 9m + 12,$$

$$x_0 = \frac{m+3}{m}, \quad m \neq 0.$$

(x - аргумент для вершины параболы)

$$f(1) = m - 2(m+3) + m = -6 < 0.$$

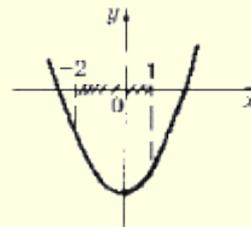


Рис. 8

$$1) \text{ (рис. 8.) } \begin{cases} m > 0, \\ D > 0, \\ f(-2) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ 9m + 12 < 0, \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, \\ m > -1.5, \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

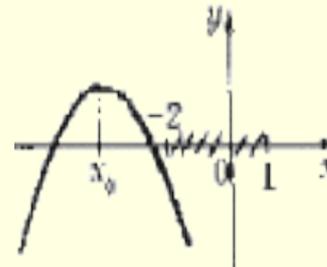


Рис. 9

$$2) \text{ (рис. 9.) } \begin{cases} m < 0, \\ D > 0, \\ x_0 < -2, \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Рубрика «Вопрос – ответ»

Вопрос. Какую нужно преследовать цель при изучении решения неравенств второй степени ?
Ответ. Изучить основные приемы решения. Выработать умения нахождения приемов решения при решении неравенств смешанных типов.

Вопрос. С чего начинать рассмотрение каждого случая
Ответ. С графического изображения.

Вопрос. Каково минимальное количество случаев, которое может быть при рассмотрении данных неравенств?
Ответ. Один случай (см. задачу 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ \frac{m+3}{m} < -2, \\ 9m + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ m > -1,5, \\ m + 3 > -2m, \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < m < 0, \\ m > -1, \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0, \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

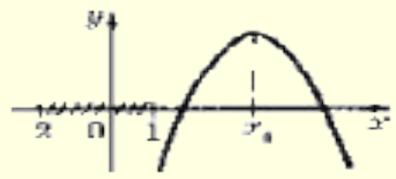


Рис. 10

3) (рис. 10.) $\begin{cases} m < 0, \\ D > 0, \\ f(1) < 0, \\ x_0 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ 2m + 8 > 0, \\ -6 < 0, \\ m + 8 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1,5, \\ m + 8 < m, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1,5 < m < 0, \\ 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

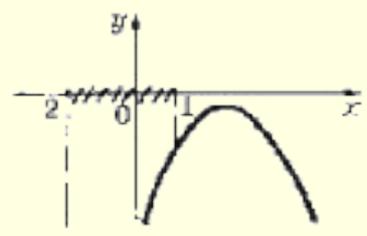


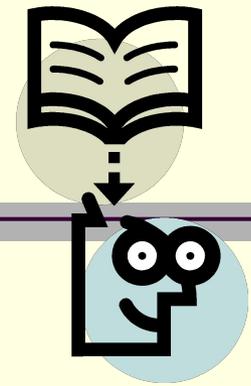
Рис. 11

4) (рис. 11.) $\begin{cases} m < 0, \\ D \leq 0, \\ f(-2) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m < -1,5.$$

Ответ: $m < -1,5.$





Задача 2.

При каких значениях a функция $f(x) = -x^3 + 4x^2 - ax - 8$ возрастает на $(1; 2)$?

Решение.

Напишем производную от $f(x)$ и воспользуемся критерием возрастания:

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - a > 0, \text{ т. е. } 3x^2 - 8x + a < 0.$$

Пусть $\varphi(x) = 3x^2 - 8x + a$. Тогда имеем

$$\frac{D}{4} = 16 - 8a,$$

$$\varphi(1) = 3 - 8 + a = a - 5,$$

$$\varphi(2) = 12 - 16 + a = a - 4.$$

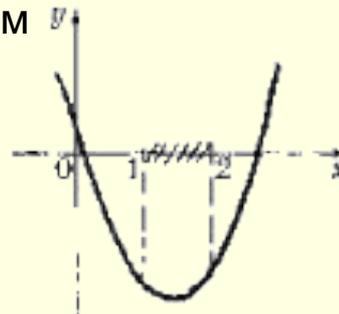


Рис. 12

$$\begin{cases} D > 0, \\ \varphi(1) < 0, \\ \varphi(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 8a > 0, \\ a - 5 < 0, \\ a - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{16}{8}, \\ a < 5, \\ a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a < 4.$$



В задаче 2 приводится как раз пример того задания, когда нужно рассматривать только один случай графического изображения

тест №1

Решение линейных неравенств с параметрами первой степени

1. Что является решением данного неравенства $3x - 6a + 5 < 0$, при $|x| < 3$

- 1) система решений каждого случая
 - 2) совокупность решений каждого случая
- Номер правильного ответа

2. При каких значениях k неравенство $k(x+1) - 4x - 5 < 0$, справедливо для $|x| \leq 3$

- 1) $k > 6$
- 2) $3,5 < k < 4,25$
- 3) $3,5 < k < 4,2$
- 4) $k > 0$

Номер правильного ответа

3. При каких значениях a неравенство $2x - a^2a + 5 < 0$ верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < 2$?

- 1) $a < -3; a > 3$
- 2) $|a| < 3$
- 3) $a > 3$
- 4) $a < 3$

Номер правильного ответа

4. При каких значениях m неравенство $(m - 2)x + 2m - 16 < 0$ верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| \geq 5$?

- 1) $m = 3$
- 2) $m = 1$
- 3) $m = 7,5$
- 4) $m = 2$

Номер правильного ответа

При каких значениях b неравенство $\frac{2x - b - 6}{3x + b + 6} < 0$

верно при всех x , удовлетворяющих условию $|x| \leq 2$?

- 1) $b < -11; b > 1$
- 2) $b = 1$
- 3) $b > 1$
- 4) $b < 0$

Номер правильного ответа

Ваша оценка

Обработка результатов

вопрос1	0
вопрос2	0
вопрос3	0
вопрос4	0
вопрос5	0
итого	0

тест N 2

Решение линейных неравенств с параметрами второй степени

1. Что является решением данного неравенства $2x^2 - 4a + 1 < 0$, при $|x| < 3$

- 1) система решений каждого случая
 - 2) совокупность решений каждого случая
- Номер правильного ответа

2. При каких значениях a неравенство $ax^2 + 2(3 - 2a)x - 24 > 0$, справедливо для $|x| < 5$

- 1) $a > 6$
- 2) \emptyset
- 3) $3,5 < a < 4,2$
- 4) $a > 0$

Номер правильного ответа

3. При каких значениях a неравенство $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) > 0$, верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| \leq 3$?

- 1) $a < -3$
- 2) $|a| < 3$
- 3) $a > 3$
- 4) $a < 3$

Номер правильного ответа

4. При каких значениях a неравенство $ax^2 - x - a(a^2 + 1) > 0$ верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < 2$?

- 1) $a = 3$
- 2) $a = 1$
- 3) $a < 2$
- 4) $a = 2$

Номер правильного ответа

5. При каких значениях a функция $f(x) = \frac{(a-1)x^2}{3} + (a-1)x^2 + 2x + 1$

возрастает для всех $x \in R$.

- 1) $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$
- 2) $a = 1$
- 3) $a > 0$
- 4) $a < 0$

Номер правильного ответа

Ваша оценка

Обработка результатов

вопрос1	0
вопрос2	0
вопрос3	0
вопрос4	0
вопрос5	0
итого	0

Литература

- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2003 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2004 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2007 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2008 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2008 г.
- Репетитор по математике. А.И. Замыслова.
- Задачи вступительных экзаменов по математике. В.С. Белоносов.
- Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. В.С. Крамор.
- 1С-репетитор по математике .ЕГЭ .(Диск CD-R)