

Презентация

на тему:
«Ряды Фурье»

Разработала
студентка
группы Со-11
Одинцова Т.П.

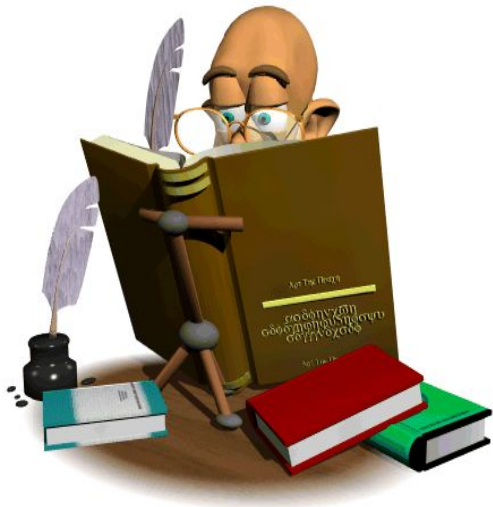
Содержание:

- I. История происхождения рядов Фурье.
- II. Определение ряда.
- III. Тригонометрический ряд.
- IV. Теорема Дирихле.
- V. Ряды Фурье и их применение в электротехнике
- VI. Примеры решения задач с помощью рядов Фурье.



Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

— французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской академии наук. Писал труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и математической физике. Его «Аналитическая теория тепла» явилась основой в создании теории тригонометрических рядов то есть рядов Фурье.



Ряд Фурье — способ представления произвольной сложной функции суммой более простых. В общем случае количество таких функций может быть бесконечным, при этом чем больше таких функций учитывается при расчете, тем выше оказывается конечная точность представления исходной функции. В большинстве случаев в качестве простейших используются тригонометрические функции синуса и косинуса, в этом случае ряд Фурье называется тригонометрическим, а вычисление такого ряда часто называют разложением на гармоники.

Тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

или, более сжато

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Коэффициентами тригонометрического ряда – называют постоянные числа, **a_0** , **a_n** и **b_n** ($n=1,2,3,\dots$)



a_0, a_n и $b_n (n=1,2,3...)$ можно рассчитать по таким формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

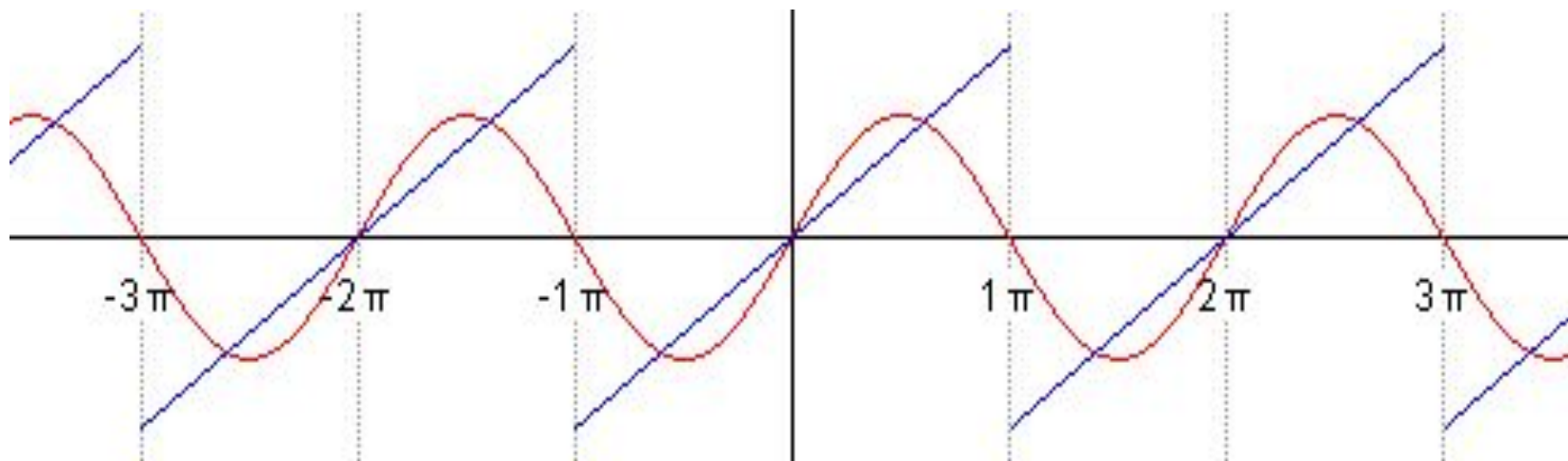
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$



Если обозначить $S_N(f, x)$ частичные суммы ряда Фурье $f(x)$.

$$S_N(f, x) := \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx}$$

сходимость последовательности функций $S_N(f, x)$ к функции $f(x)$ в различных смыслах. Функция f предполагается 2π -периодической (если она задана только на промежутке, её можно периодически продолжить). Если $f \in (-\pi, \pi)$, то последовательность $S_N(f, x)$ сходится к функции.



ТЕОРЕМА ДИРИХЛЕ

- ❖ Определение 1. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a;b]$, если она непрерывна на этом промежутке или имеет на нем конечное число разрывов I рода.
- ❖ Определение 2. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a;b]$, если она монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна (т.е. функция на $[a;b]$ имеет конечное число экстремумов).
- ❖ Определение 3. Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[a;b]$, если $f(x)$ на $[a;b]$ является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } -\pi < x \leq 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Данная функция является кусочно-монотонной и ограниченной, следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

Вычислим коэффициенты Фурье для заданной функции. Поскольку функция равна нулю на промежутке от 0 до π то для нахождения коэффициентов Фурье интегрирование будем производить только в пределах от $-\pi$ до 0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{1}{\pi} (0 - (-\pi)^2) = -\frac{1}{\pi} \pi^2 = -\pi$$

$Y = \cos x$, $y = \sin x$

$$u = x; \quad dv = \cos(kx) dx;$$

$$du = dx; \quad v = \frac{1}{k} \sin(kx) dx;$$

$$a = -\pi; \quad b = 0.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2x \cos(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(x \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 \cdot \frac{1}{k} \sin(k \cdot 0) - (-\pi) \cdot \frac{1}{k} \sin(-k\pi) - \frac{1}{k^2} (-\cos(kx)) \Big|_{-\pi}^0 \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left((-\pi) \cdot \frac{1}{k} \sin(k\pi) + \frac{1}{k^2} (\cos(k \cdot 0) - \cos(-k\pi)) \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left((-\pi) \cdot \frac{1}{k} \sin(k\pi) + \frac{1}{k^2} (1 - \cos(k\pi)) \right). \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k) \right) = \frac{2}{\pi k^2} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} \cdot 2 & \text{при нечетном } k, \\ 0 & \text{при четном } k, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2} & \text{при нечетном } k, \\ 0 & \text{при четном } k. \end{cases}$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$u = x; \quad dv = \sin(kx) dx;$$

$$du = dx; \quad v = -\frac{1}{k} \cos(kx) dx;$$

$$a = -\pi; \quad b = 0.$$



$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(x \left(-\frac{1}{k} \right) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \right) dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(0 \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cos(k \cdot 0) - (-\pi) \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cos(-k\pi) + \frac{1}{k^2} \sin(kx) \Big|_{-\pi}^0 \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-\pi) \cdot \frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} (\sin(k \cdot 0) - \sin(-k\pi)) \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-\pi) \cdot \frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} (0 + \sin(k\pi)) \right) = \frac{2}{k} (-1)(-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} = \\
 &= \begin{cases} 2/k & \text{при нечетном } k, \\ -2/k & \text{при четном } k. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \\
 &= \frac{-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k^2} (1 - (-1)^k) \cos(kx) + \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx) \right) = \\
 &= \frac{-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} \dots \right) + 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k^2} (1 - (-1)^k) \cos(kx) + \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx) \right) = \\ &= \frac{-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} \dots \right) + 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right). \end{aligned}$$

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Рассмотрим ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b) или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода. Рядом Фурье такой функции $f(x)$ на отрезке (a, b) по ортогональной системе $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

называется ряд коэффициенты которого определяются равенствами

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx}, n = 1, 2, \dots$$

Вид ряда Фурье в ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Коэффициенты a_n и b_n рассчитываются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Кроме всего этого, стоит сказать о сумме тригонометрического ряда Фурье.

Все

функции системы являются периодическими с общим периодом $T = 2l$

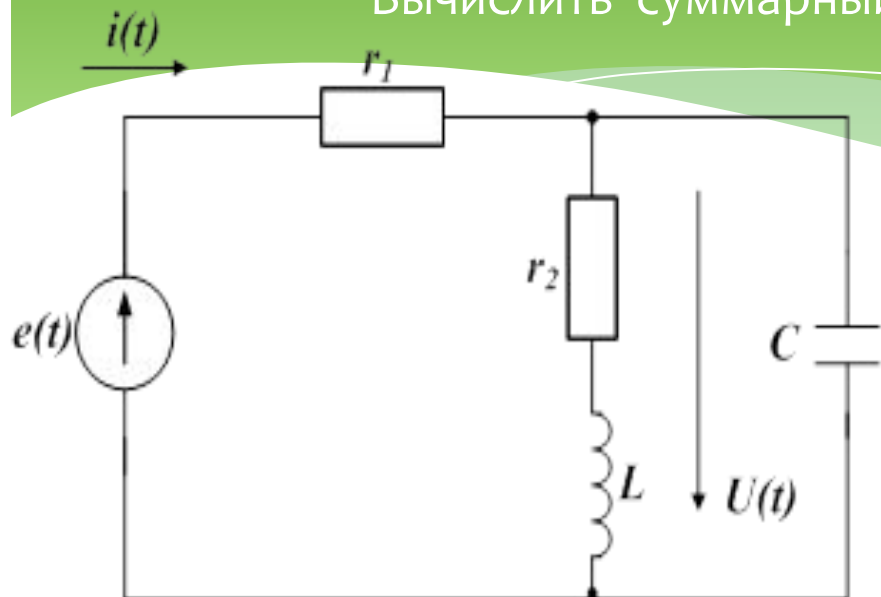
Поэтому если ряд сходится на отрезке $[-l, l]$ то он сходится и на всей числовой оси, а его сумма периодически повторяет те

значения, которые она принимала на отрезке. Таким образом, можно говорить не только о разложении в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезки $[-l, l]$.

$$[-l, l]$$

Пример2.

Вычислить суммарный ток в схеме на рис. 1.



Дано:

$$e(t) = 40 + 25 \sin \omega t + 30 \sin 2\omega t$$

$$r_1 = 10 \text{ M} \quad r_2 = 1,50 \text{ M}$$

$$\omega L = 10 \text{ M} \quad 1/\omega C = 140 \text{ M.}$$

Рисунок 1. Электрическая цепь



Решение:

Сопротивление постоянному току

$$z(0) = r_1 + r_2 = 2,5 \text{ Ом.}$$

Постоянная слагающая тока:

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)} = \frac{40}{2,5} = 16 \text{ А.}$$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты: $z(j\omega) = 2,72 + j0,88 \text{ Ом.}$

Комплексная амплитуда тока основной частоты: $I_{1m} = \frac{25}{2,72 + j0,88} = 8,74 \angle -17,9^\circ \text{ А.}$

Комплексное сопротивление цепи для утроенной частоты:

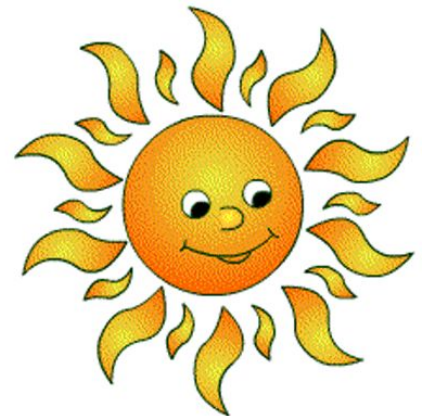
$$z(j2\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j2\omega L) \left(-j \frac{1}{2\omega C} \right)}{r_2 + j \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C} \right)} = 3,7 + j2 \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока третьей гармоник:

$$I_{2m} = \frac{30}{3,7 + j2} = 7,13 \angle -28,4^\circ A.$$

Таким образом, искомое значение суммарного тока будет иметь вид:

$$i(t) = 16 + 8,74 \sin(\omega t - 17,9^\circ) + 7,13 \sin(2\omega t - 28,4^\circ) A.$$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ =)

