



Решение заданий № 23

Учитель математики
МОУ СОШ № 25 с УИОП
Радионова Е.Ю.

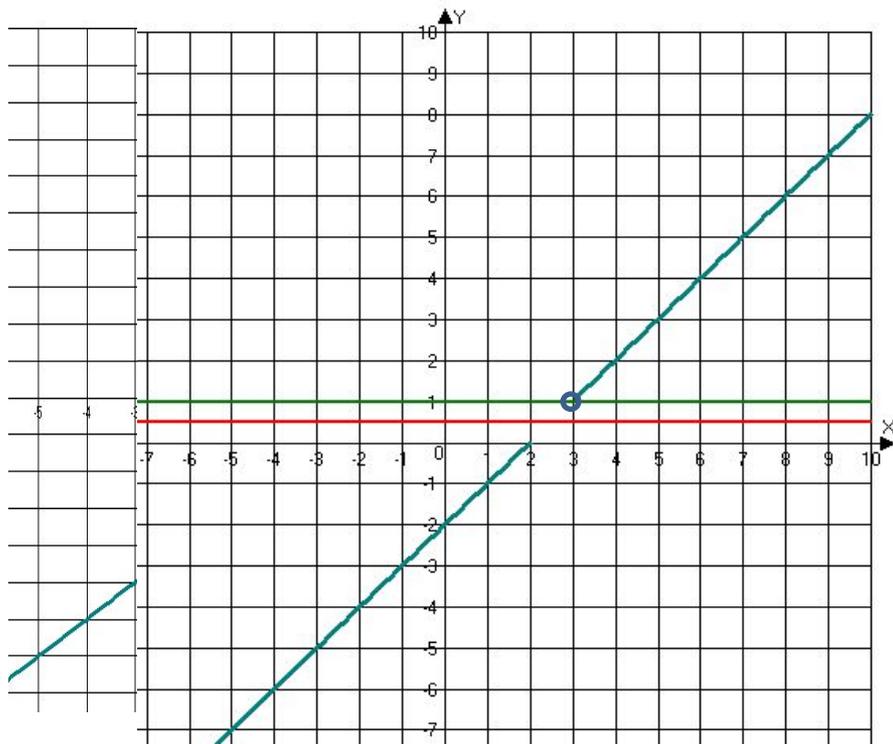
Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение:

1. Преобразуем функцию: $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{|(x - 2) \cdot (x - 3)|}{x - 3} = \frac{|x - 2| \cdot |x - 3|}{x - 3}, x \neq 3$

2. Рассмотрим ОДЗ функции: $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; \infty)$

3. Построим график функции:



$$\begin{cases} x - 2, \text{ если } x \in (-\infty; 2] \\ x \in [2; 3) \text{ не удовлетворяет условию} \\ x - 2, \text{ если } x \in (3; \infty) \end{cases}$$

Ответ: при $a \in (0; 1]$

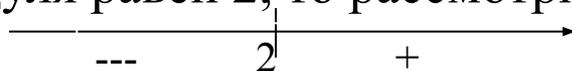
прямая $y = a$ не имеет с графиком функции общих точек.

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$$

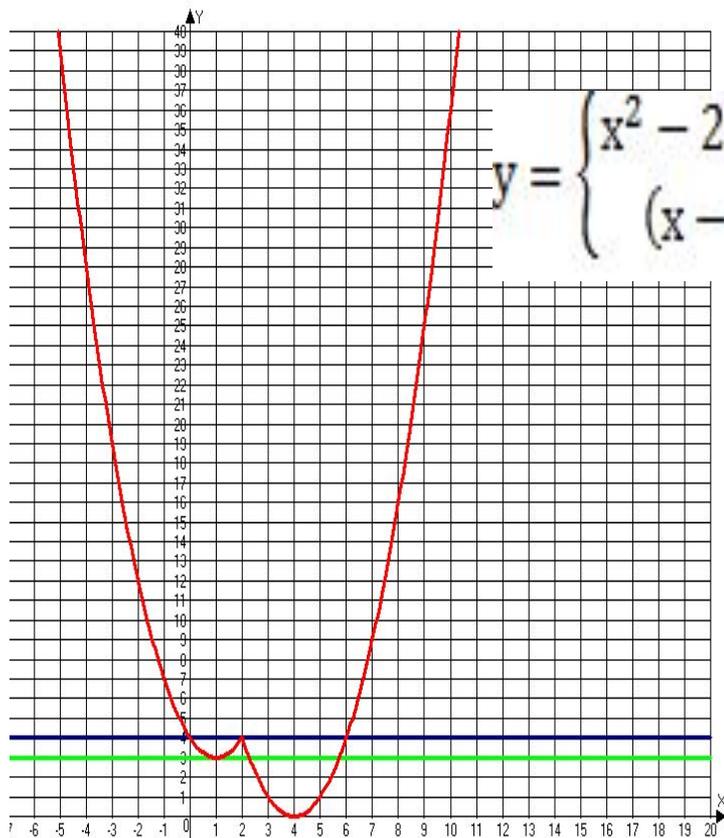
Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$ и найдите все значения a , при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$.

Решение:

1. Так как нуль модуля равен 2, то рассмотрим знаки модуля:



2. Построим график функции:



$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & \text{если } x \in (-\infty; 2), \text{ вершина параболы } (1; 3) \\ (x - 4)^2, & \text{если } x \in [2; +\infty), \text{ вершина параболы } (4; 0) \end{cases}$$

Ответ: при $a \in [0; 1]$ график функции имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$

Постройте график функции

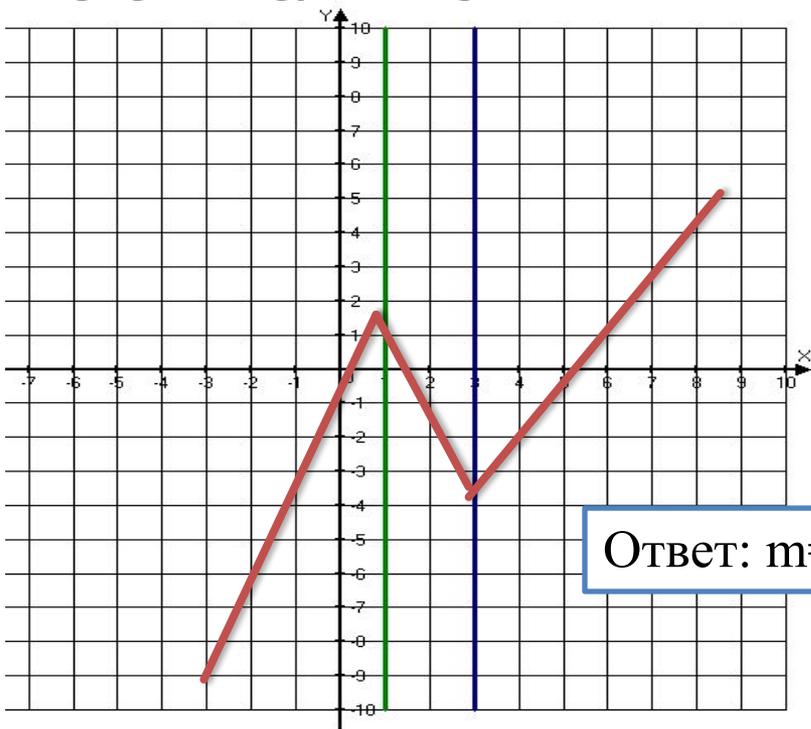
$$y = \begin{cases} 2,5x - 3,5, & \text{если } x < 2, \\ -3x + 7,5, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ x - 4,5, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

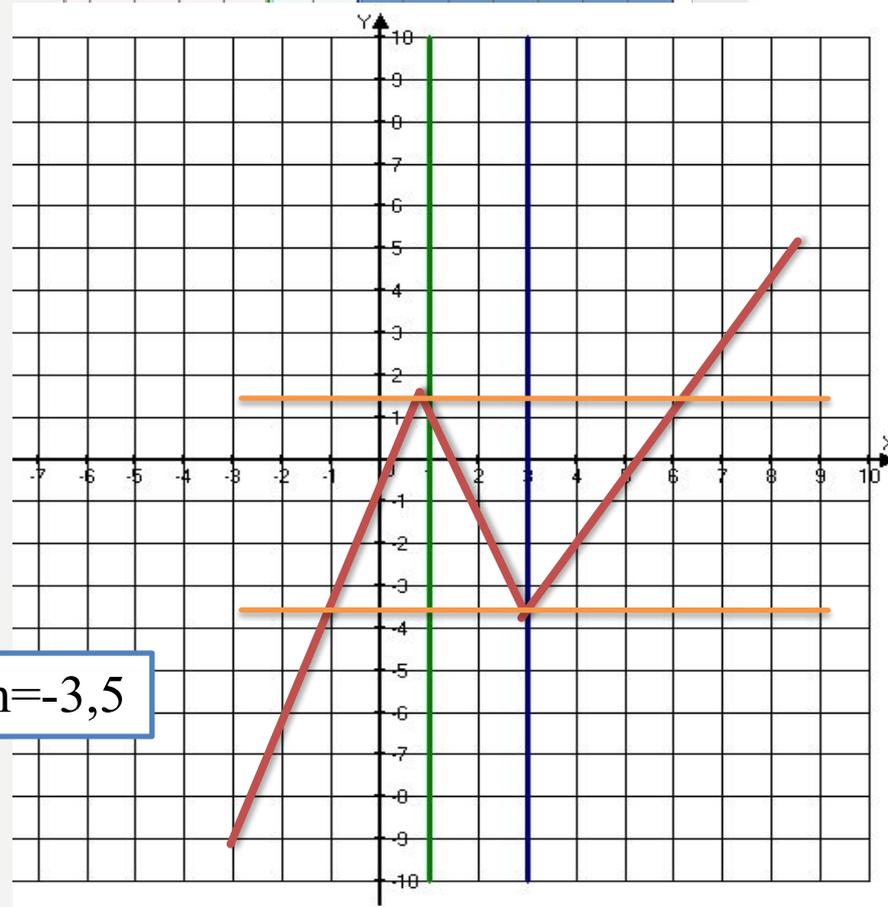
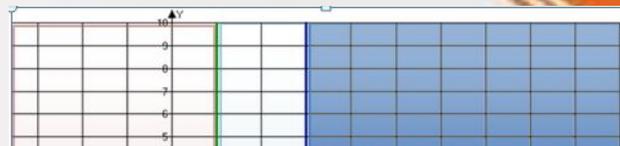
Решение:

Перед нами кусочно-заданная функция.

1. Наносим три области.
2. Строим график функции.
3. Вводим прямую $y = m$, так, чтобы она имела с графиком функции ровно две общие точки.



Ответ: $m = 1,5$ и $m = -3,5$



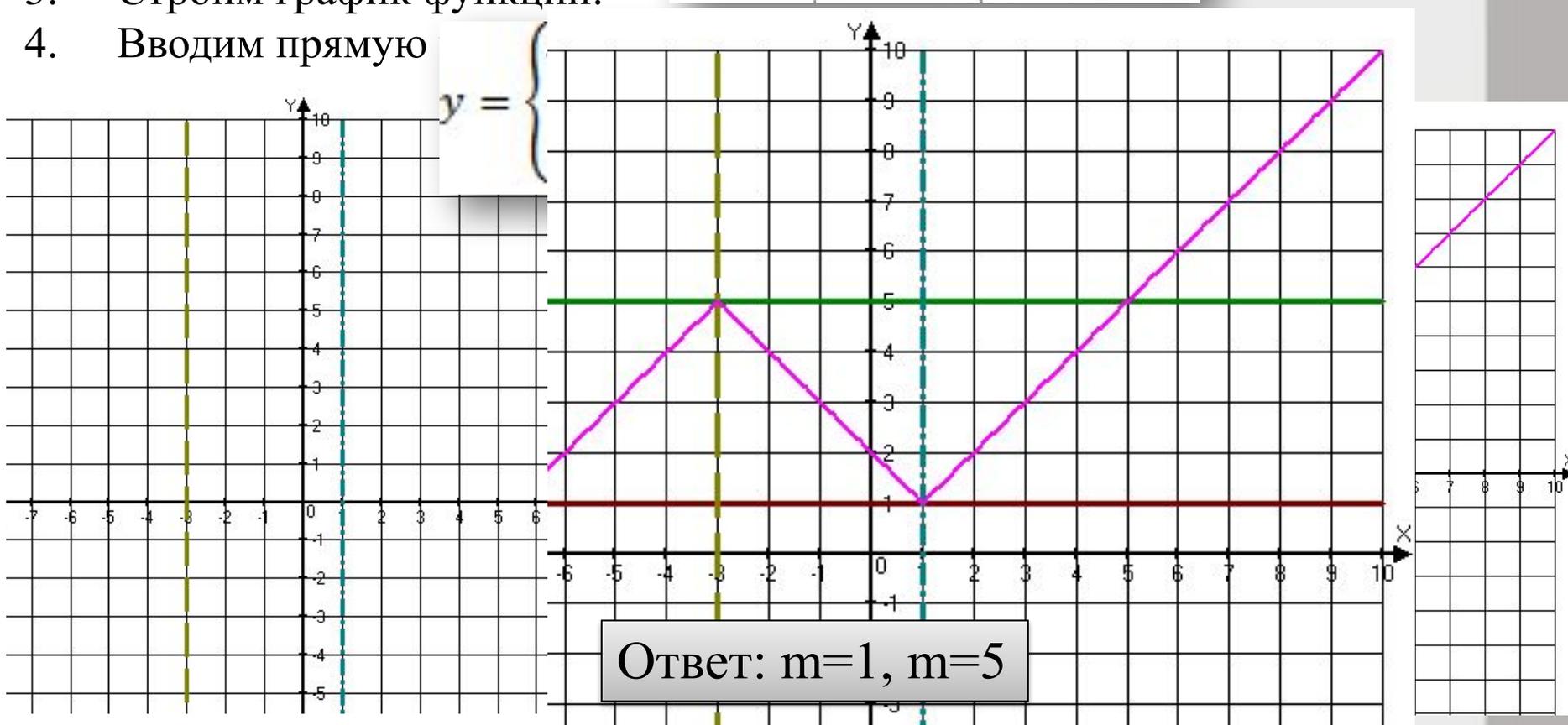
23

Постройте график функции $y = |x - 1| - |x + 3| + x + 4$ и найдите значения m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

Решение:

1. Рассмотрим знаки модулей.
2. Наносим три области.
3. Строим график функции:
4. Вводим прямую

-	-	+	$ x-1 $
-	+	+	$ x+3 $
	-3	1	x



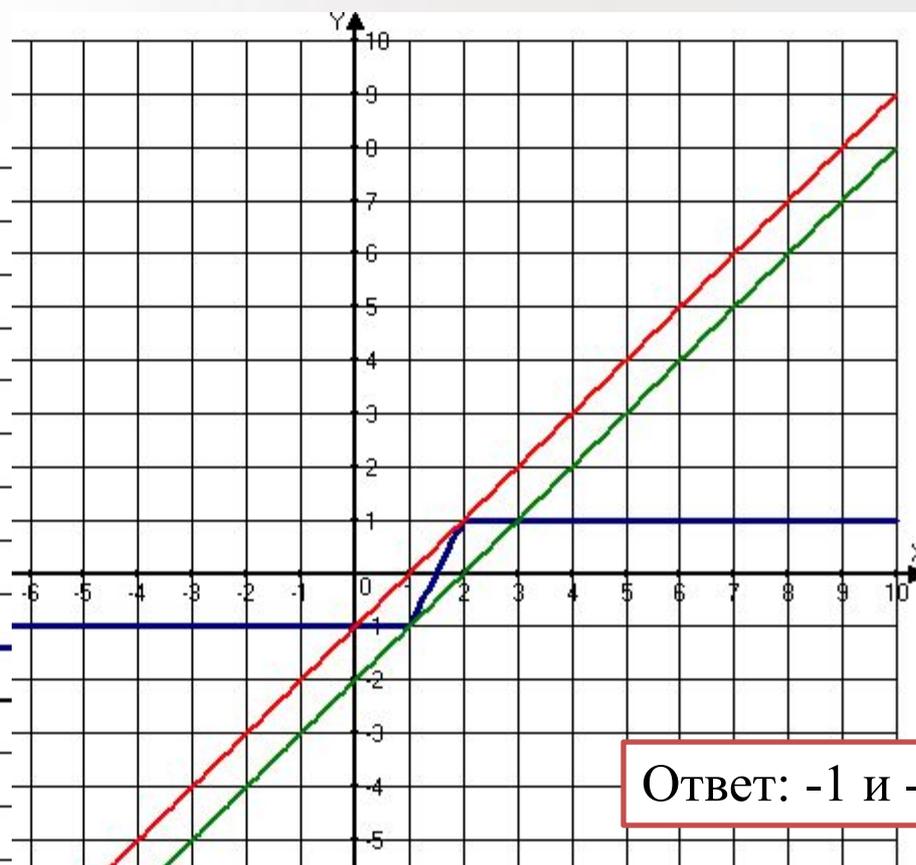
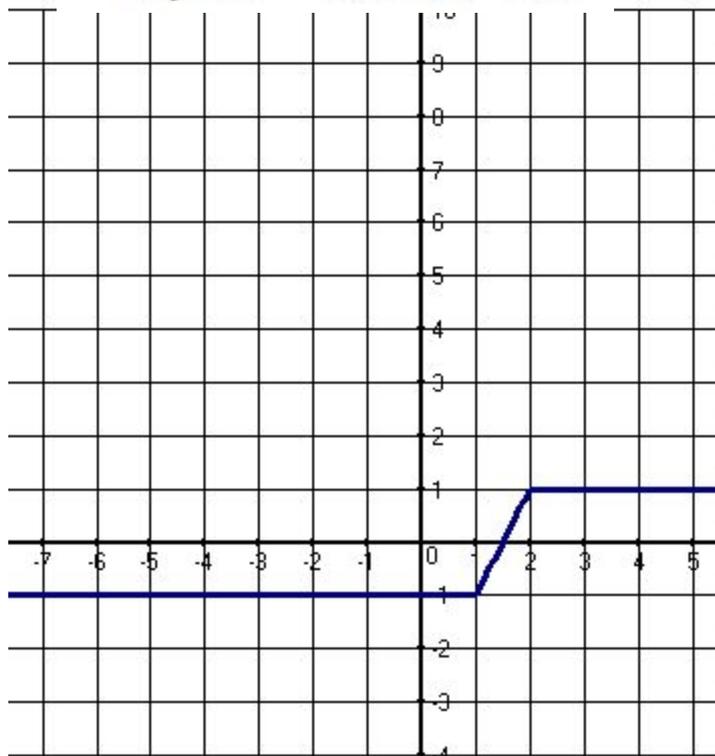
23. Постройте график функции $y = |x-1| - |x-2|$ и определите, при каких значениях

b прямая $y = x + b$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение:

Нули модулей 1 и 2. Рассмотрим функцию на интервалах: $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$ и $[2; +\infty)$.

$$y = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 3, & x \in [1; 2) \\ 1, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: -1 и -2

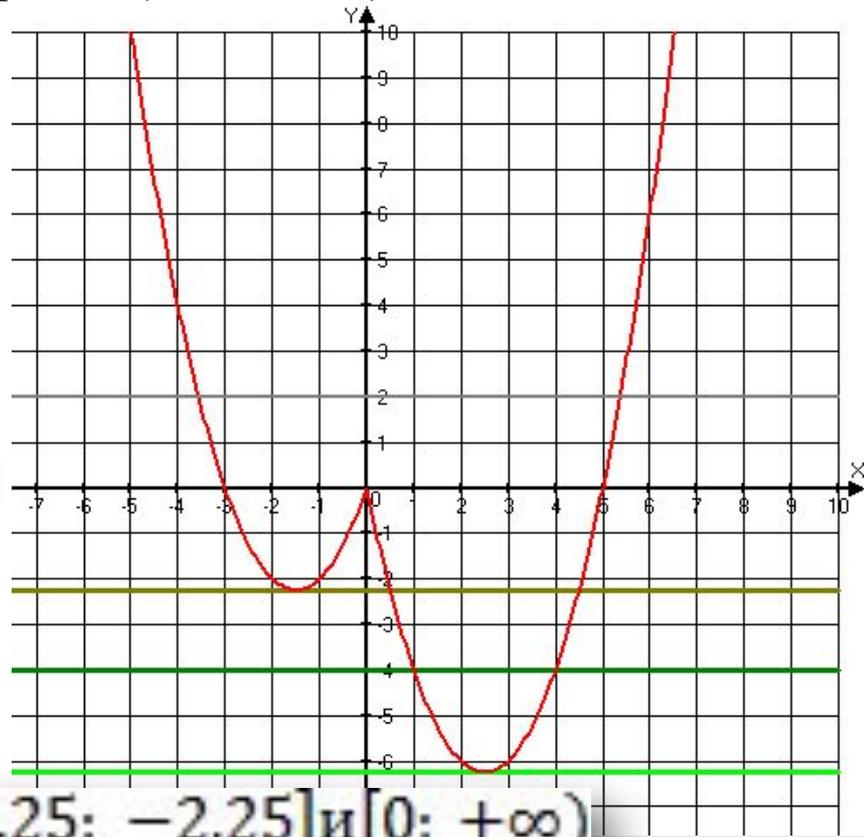
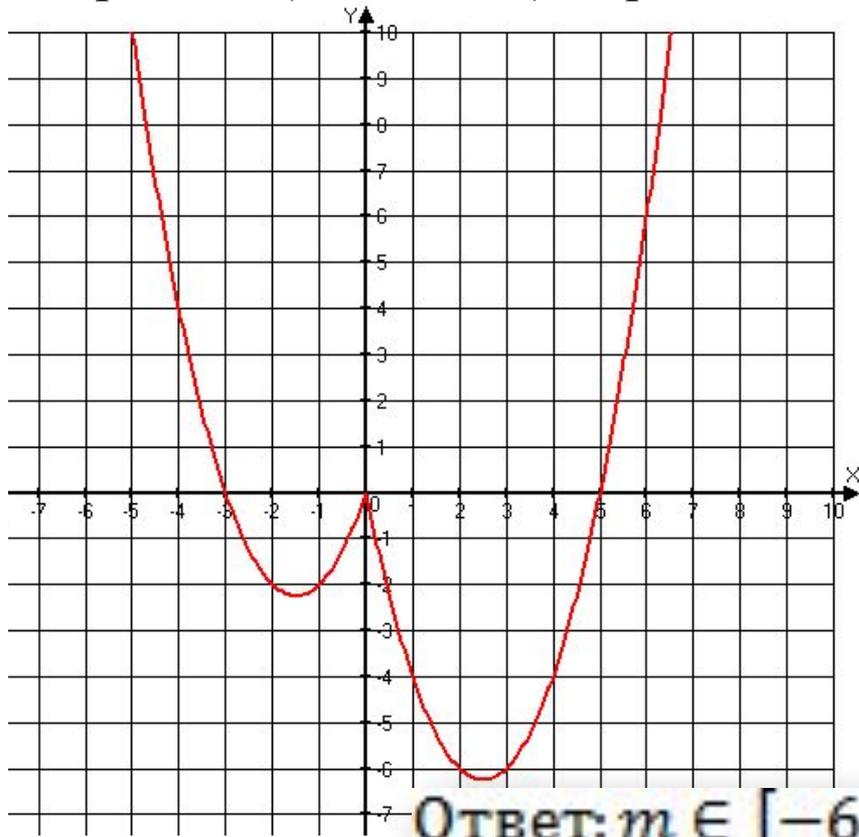
23. Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| - x$ и определите, при каких значениях m

прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

Решение:

Зная, что $|x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ определим вид функции $y = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 0 \\ x^2 - 5x, & x > 0 \end{cases}$

Построим график функции (вершина первой параболы $(-1,5; -2,25)$, вершина второй $(2,5; -6,25)$).



Ответ: $m \in [-6,25; -2,25]$ и $[0; +\infty)$

23. Известно, что графики функций $y = -x^2 + p$ и $y = 2x + 5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.



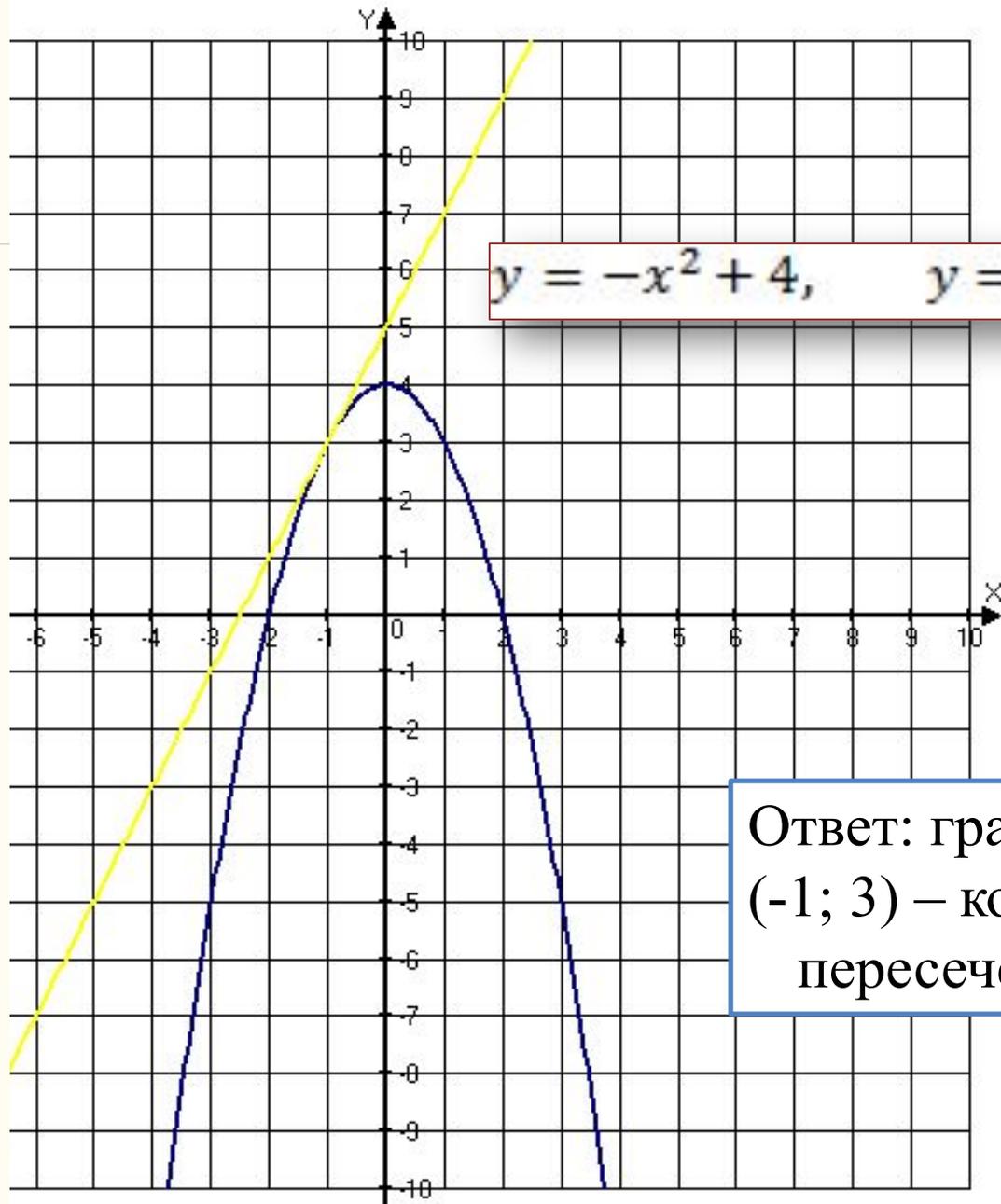
Решение:

1. Так как графики функций имеют общую точку, то приравняем правые части уравнений $-x^2 + p = 2x + 5$, $-x^2 - 2x + p - 5 = 0$

2. Точка одна, значит квадратное уравнение имеет одно решение ($D=0$). Найдем дискриминант ($4p - 16=0$, $p=4$).

3. Определим координаты этой точки: $(-1; 3)$.

4. Построим в одной системе координат графики этих функций: $y = -x^2 + 4$, $y = 2x + 5 = 0$



$$y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 5 = 0$$

Ответ: графики функций;
(-1; 3) – координаты точки
пересечения графиков.

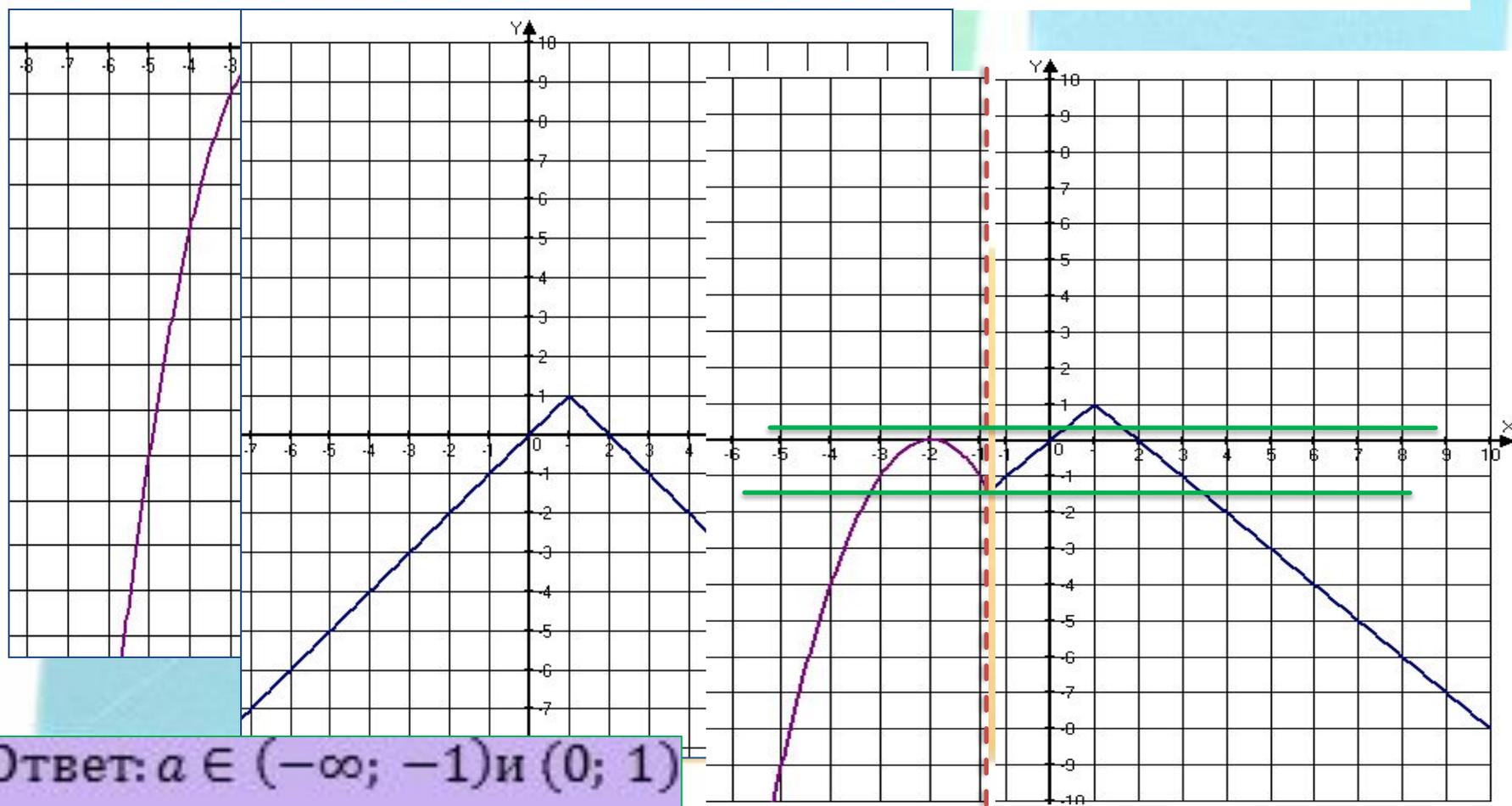
23

Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4, & \text{если } x < -1, \\ 1 - |x - 1|, & \text{если } x \geq -1, \end{cases}$

и найдите, при каких значениях параметра a он имеет ровно две общие точки с прямой $y = a$.

$y = -x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2$, парабола, ветви вниз, вершина $(-2; 0)$

$y = 1 - |x - 1|$, график функции $y = |x|$ с вершиной в точке $(1; 1)$



Ответ: $a \in (-\infty; -1)$ и $(0; 1)$

23

Постройте график функции $y = \frac{x-1}{(\sqrt{x-x^2})^2}$ и найдите все значения k , при

которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

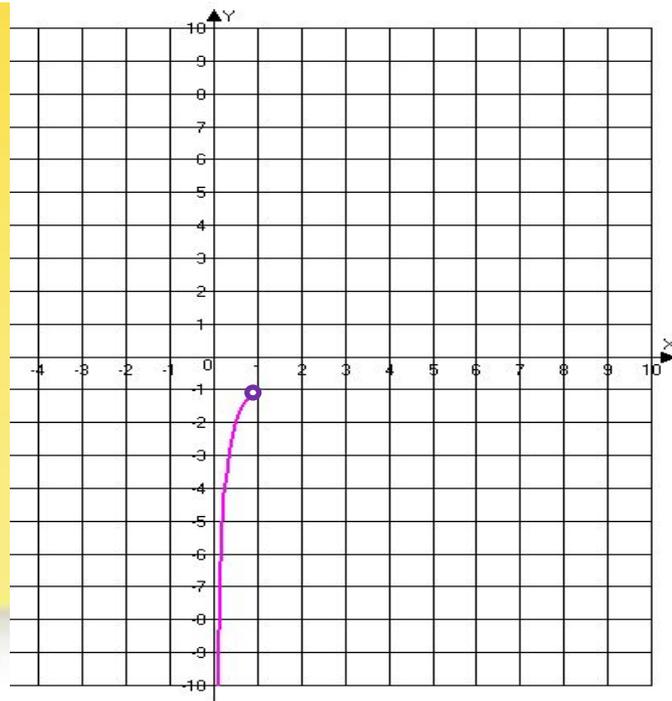
ОДЗ: $x - x^2 > 0$, значит $x \in (0; 1)$

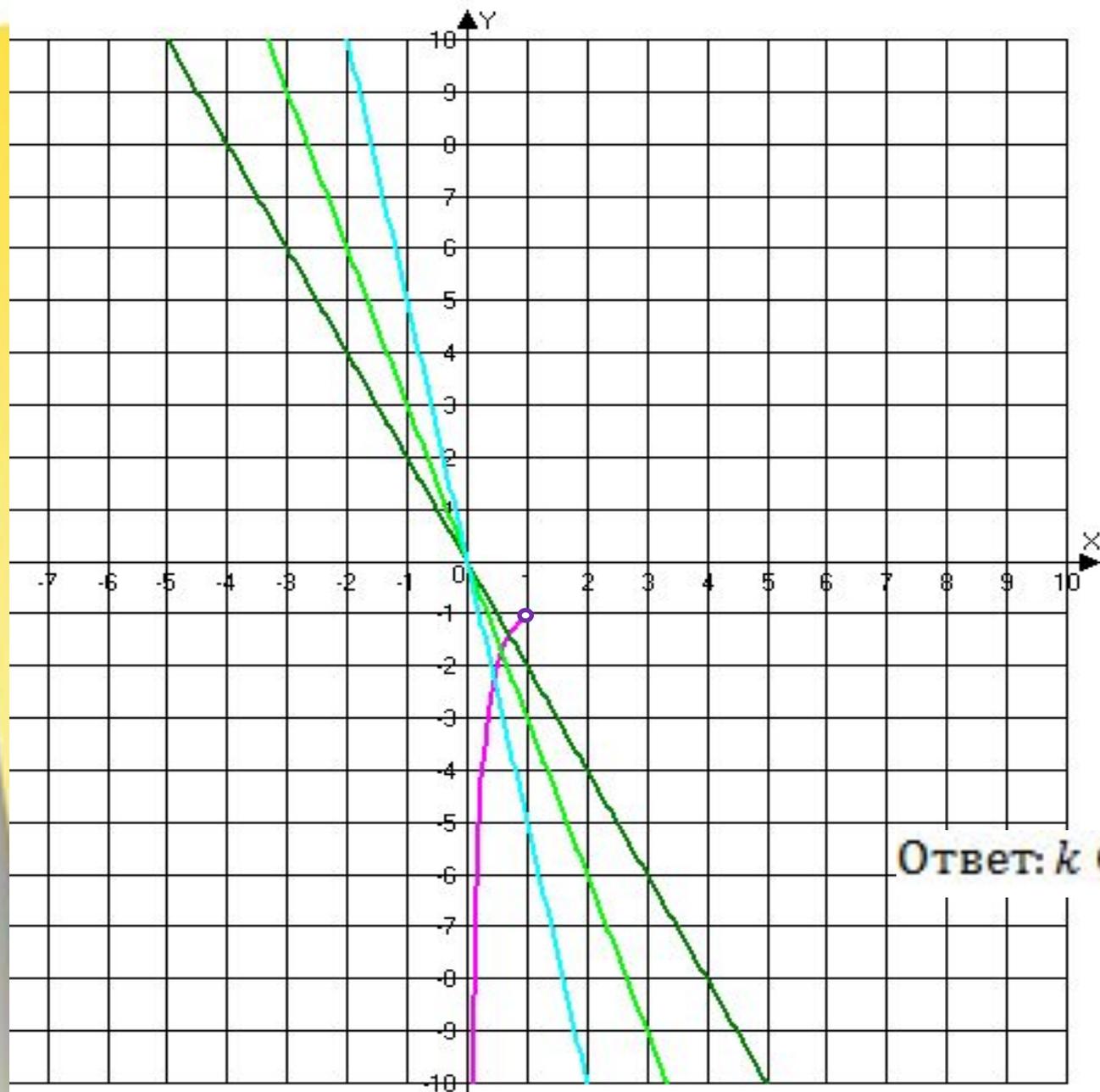
$$\text{Упростим: } y = \frac{x-1}{(\sqrt{x-x^2})^2} = \frac{x-1}{|x-x^2|} = \frac{x-1}{|x(1-x)|} = \frac{x-1}{|x| \cdot |1-x|} = \frac{x-1}{|x| \cdot |x-1|}$$

-	+	+	$ x $
-	-	+	$ x-1 $

\xrightarrow{x}
 0 1

С учетом знаков и ОДЗ: $y = \begin{cases} (-\infty; 0) - \text{не принадлежит ОДЗ} \\ \frac{-1}{x}, (0; 1) \\ (1; +\infty) - \text{не принадлежит ОДЗ} \end{cases}$





Ответ: $k \in (-\infty; -1)$

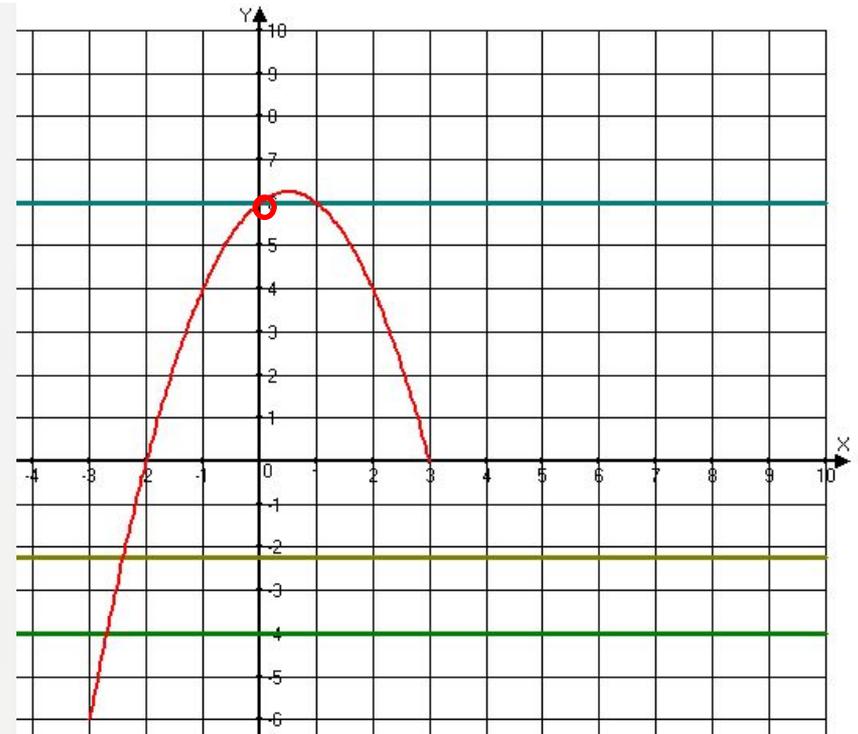
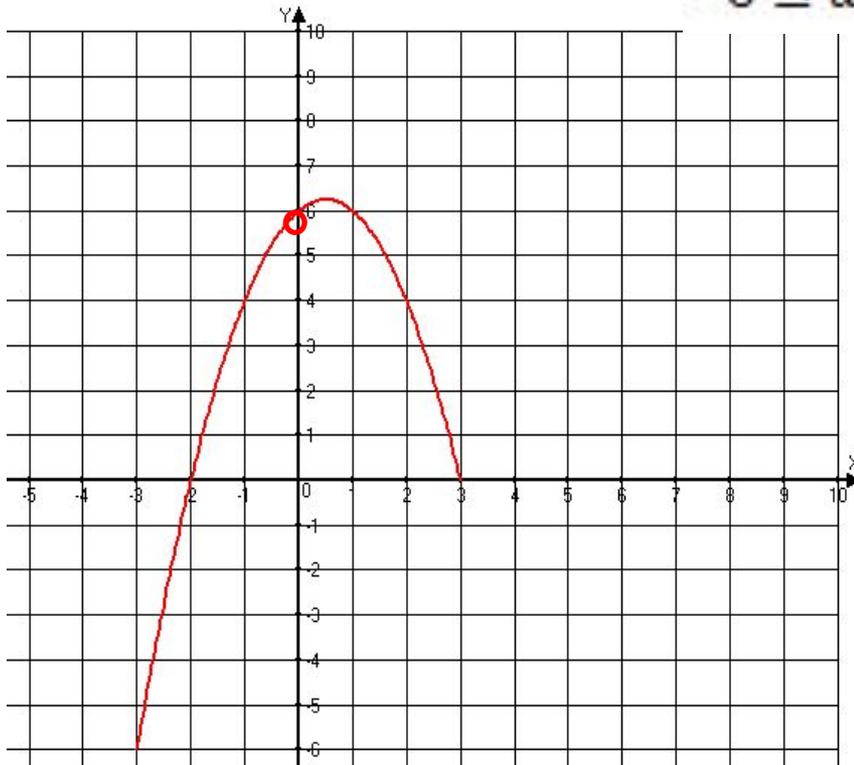
Постройте график функции $y = (\sqrt{9 - x^2})^2 + \frac{x^2 - 3x}{x}$ и найдите, при каких значениях a прямая $y=a$ имеет с ним ровно одну общую точку.

Решение:

Найдем область определения функции: $9 - x^2 \geq 0, x \neq 0$ ($x \in [-3; 0) \cup (0; 3]$)

Таким образом, на области определения функция принимает вид: $y = -x^2 + x + 6$

Прямая $y=a$ имеет с графиком данной функции ровно одну точку при
 $-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6,25$



Ответ: $-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6,25$

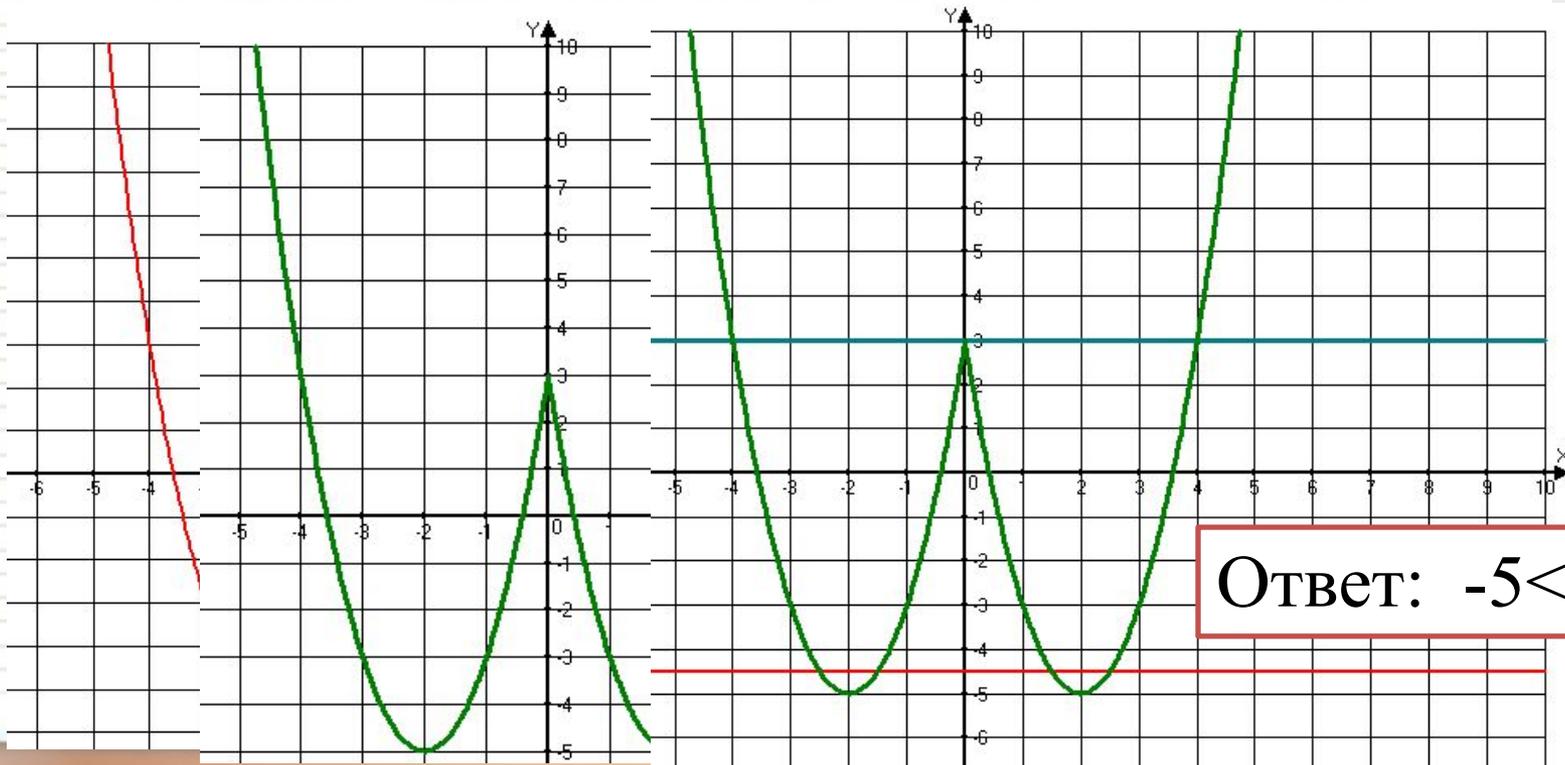
Постройте график функции $y = 2x^2 - 8 \cdot |x| + 3$ и найдите, при каких значениях a прямая $y=a$ имеет с ним более двух общих точек.

Решение:

Данная в условии задачи функция определена на всей числовой прямой и четная.

При $x \geq 0$ график функции является параболой $y = 2x^2 - 8x + 3$

При $x < 0$ график функции является параболой $y = 2x^2 + 8x + 3$



Ответ: $-5 < a \leq 3$

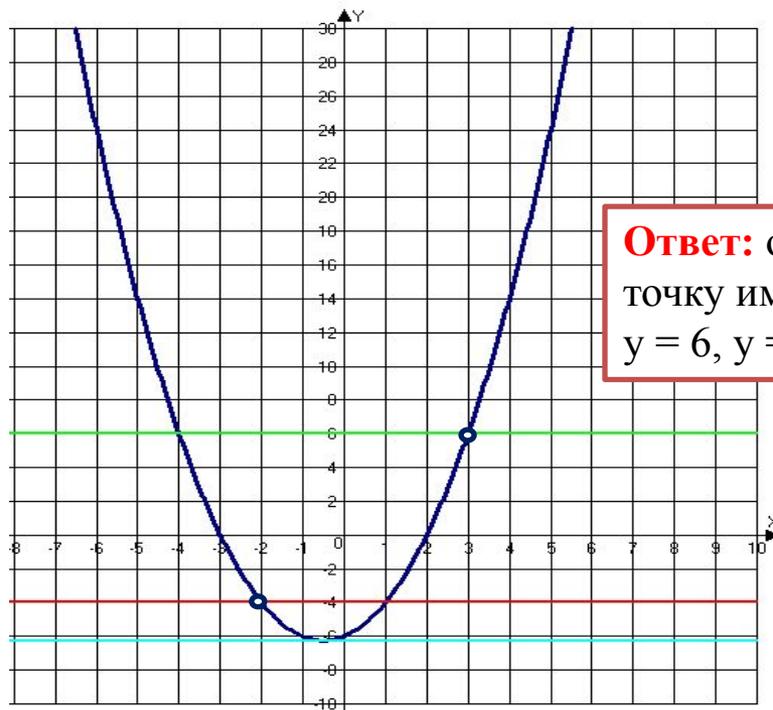
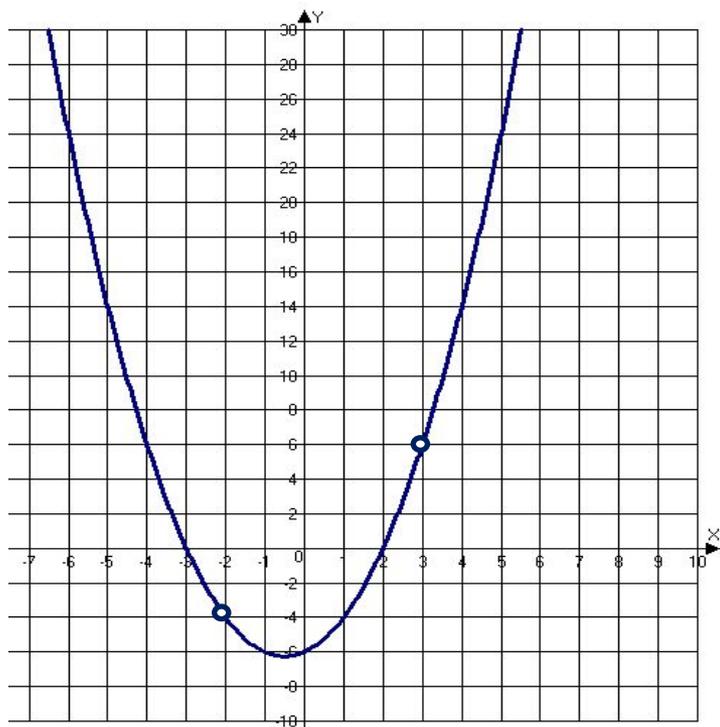
23

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. Данная функция дробно – рациональная и определена не для всех действительных чисел.
2. Область определения: $x \neq 3$ и $x \neq -2$
3. Теперь преобразуем функцию, разложив числитель на множители

$$y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x^2 - 9)(x^2 - 4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = (x+3)(x-2)$$

$y = m$ семейство прямых параллельных оси Ox



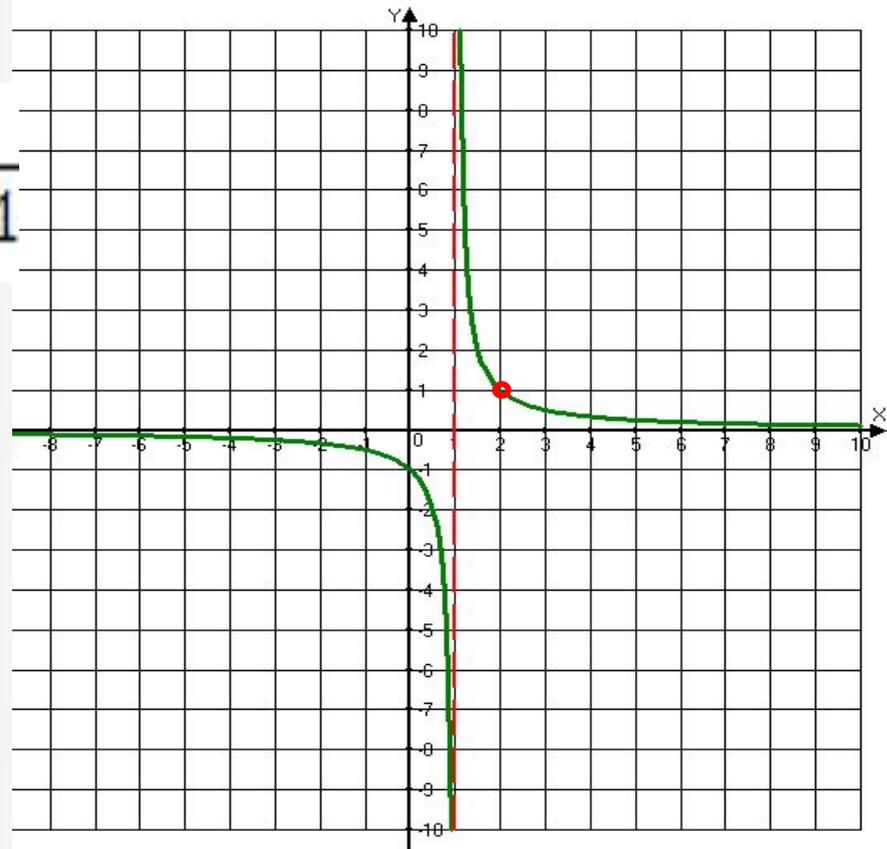
Ответ: одну общую точку имеют прямые: $y = 6$, $y = -4$ и $y = -6,25$

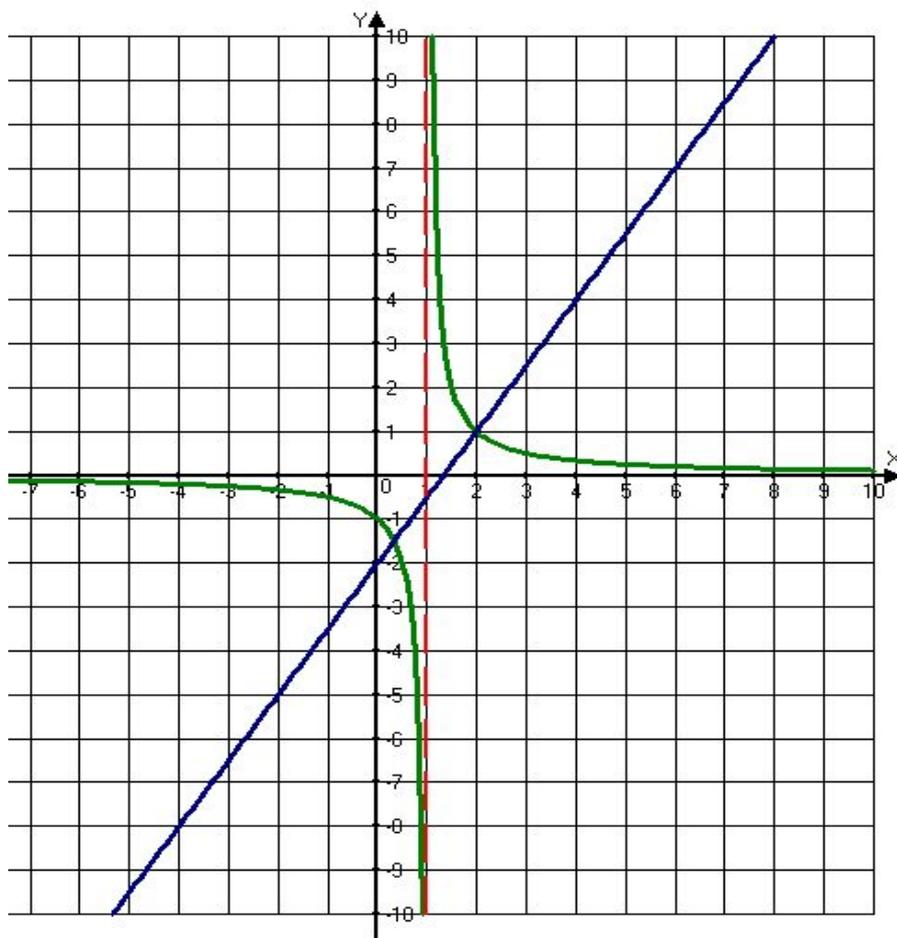
23. Постройте график функции $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

ОДЗ: $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$

$$y = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

Графиком данной функции является гипербола, 1 и 3 четвертей, смещенная на 1 вправо.

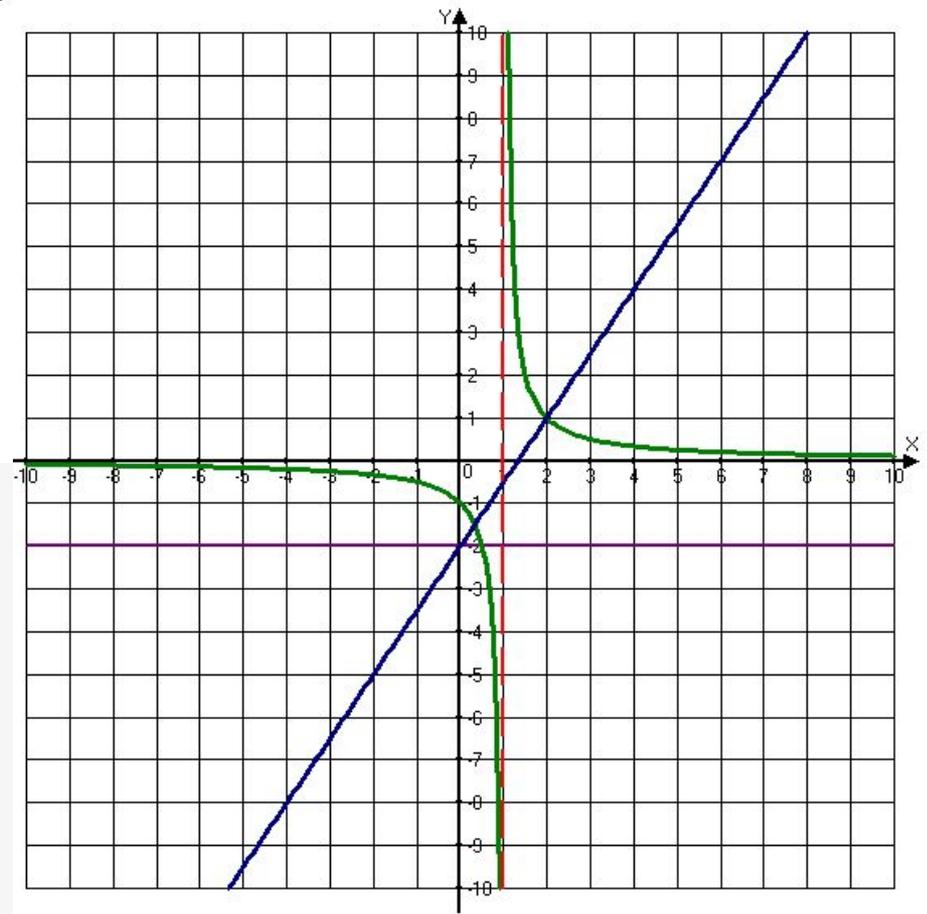




$a = 1,5$



$a = 0$



23. Постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x-1}$ и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

23. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

