

Лекция 12.

Тема: Решение задач с использованием теорем сложений и умножения вероятностей.

Цель: Научиться использовать теоремы сложения и умножения при решении задач.

Теоремы сложения и умножения для двух событий

- 1) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (A, B - несовместны)
- 2) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- 3) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, (A, B - независимы)
- 4) $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$

История о находчивом майоре

- В городе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:
- Событие Р- обнаружен преступник Рыков;
- Событие У - обнаружен преступник Угрюмов;
- Событие Ф - обнаружен преступник Фомкин;
- Событие Т - обнаружен преступник Тимошкин.
- Вскоре в центр пришли следующие сообщения:
 - 1) У+Ф, 2) УТ, 3) ΦR , 4) ΦR 5) УТ(Ф+Р), 6) УТФ, 7) УТФР

История о находчивом майоре

- Зашифруйте следующие донесения
- а) взят только один из четырех,
- б) взят по крайней мере один,
- в) взяли не менее двух,
- г) взяли только двоих,
- д) взяли только троих,
- е) ни один не обнаружен.

$$P\overline{T}\overline{U}\overline{\Phi} + P\overline{T}U\overline{\Phi} + P\overline{T}\overline{U}\Phi + P\overline{T}U\Phi$$

$$\overline{P\overline{T}\overline{U}\overline{\Phi}} = P + T + U + \Phi$$

$$PT + PU + P\Phi + TU + T\Phi + U\Phi$$

$$P\overline{T}\overline{U}\overline{\Phi} + P\overline{T}U\overline{\Phi} + P\overline{T}\overline{U}\Phi + P\overline{T}U\Phi + P\overline{T}\overline{U}\Phi + P\overline{T}U\Phi$$

$$P\overline{T}\overline{U}\overline{\Phi} + P\overline{T}U\overline{\Phi} + P\overline{T}\overline{U}\Phi + P\overline{T}U\Phi$$

$$P\overline{T}\overline{U}\overline{\Phi}$$

История одной сессии

- В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие A состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку, событие B – он сдал экзамен по философии, C – получил зачет по математике. $P(A)=0,5$; $P(B)=0,4$; $P(C)=0,7$.
- Найти вероятность того, что
- 1) студент не получил зачета; $1 - P(C) = 1 - 0,7 = 0,3$
- 2) сдал два экзамена; $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$
- 3) сдал по крайней мере один экзамен; $1 - P(\overline{AB}) = 1 - 0,5 \cdot 0,6 = 0,7$
- 4) получил зачет, но не сдал ни одного экзамена; $P(\overline{A}\overline{B}C) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,21$
- 5) сдал только один экзамен и не получил зачета; $P((\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B)\overline{C}) = (0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4) \cdot 0,3 = 0,15$
- 6) не сдал ничего; $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,09$
- 7) сдал все $P(ABC) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,14$

Задача

- **1.Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?**

- Решение:

- Авторское решение

- А – попадание первого стрелка,

- В – попадание второго стрелка,

- С – попадание хотя бы одного из стрелков.

- Тогда, очевидно $C = A + B$, причем события А и В совместны. Следовательно,

- $p(C) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

- Так как события А и В независимы, то

- $p(C) = p(A) + p(B) - p(A) p(B) = 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92$.

- Другое решение

- $p(C) = 1 - p(\overline{AB}) = 1 - 0,2 \cdot 0,4 = 1 - 0,08 = 0,92$

Задача

- 2. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

- Решение

- 1)
$$p(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$$

- 2)
$$p(A) = p(A_1) p(A_2/A_1) * p(A_3/A_1A_2) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Задача

- 3. Монета брошена три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.
- Решение:
- A_i – выпадение герба при i -м бросании монеты ($i = 1, 2, 3$), A – выпадение 2 гербов при 3 бросаниях монеты.
- $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$
- $p(A) = p(A_1) p(A_2) p(\overline{A_3}) + p(A_1) p(\overline{A_2}) p(A_3) +$
- $+ p(\overline{A_1}) p(A_2) p(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Задача

- **4** В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?

- **Решение:**

- Пусть A_k ($k=1,2,\dots,n$) обозначает, что k -я пара состоит из разноцветных шаров. Тогда вероятность события

- $A = A_1 A_2 \dots A_n$ равна

- $p(A) = p(A_1) p(A_2/A_1) \dots p(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$

- $$= \frac{n^2}{C_{2n}^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{C_4^2} \cdot \frac{1}{C_2^2} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Вопросы:

- Какие события называют совместными (несовместными)?
- Какие события называют зависимыми (независимыми)?