

Лекция 14.

Тема: Решение задач с использованием формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Цель: Овладеть навыками решения задач по формулам полной вероятности и формуле Байеса.

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i)$$

Формула Бейеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Задачи

- 1. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта ?

Решение:

Пусть **A** - событие, состоящее в том, что взятая деталь окажется первого сорта, а **H₁**, **H₂** и **H₃** - гипотезы, что она изготовлена соответственно на 1, 2 и 3 станке.

Вероятности этих гипотез соответственно равны: $P(H_1) = 0.51$

$$P(H_2) = 0.24$$

$$P(H_3) = 0.25$$

далее, из условия задачи следует, что:

$$P(A | H_1) = 0,9;$$

$$P(A | H_2) = 0,8;$$

$$P(A | H_3) = 0,7.$$

Используя формулу полной вероятности, получим искомую вероятность

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = \\ &= 0,51 \cdot 0,9 + 0,24 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,826 \end{aligned}$$

Задачи

- 2. В водоеме обнаружено загрязнение с превышением ПДК.
- Потенциальные источники - два предприятия, причем выбросы на первом происходят в 9 раз чаще, чем на втором.
- Только 15% сбросов первого предприятия превышают ПДК. Для второго предприятия эта вероятность равна 92%
- Кто виноват?!
- Решение:

$$P(H_1) = 0.9 \quad P(A|H_1) = 0.15$$

$$P(H_2) = 0.1 \quad P(A|H_2) = 0.92$$

$$P(H_1|A) = \frac{0.15 \cdot 0.9}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.595$$

$$P(H_2|A) = \frac{0.92 \cdot 0.1}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.405$$

Задачи

3. Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок — с вероятностью 0.00001. Пуля попала в цель. Кто стрелял?

Решение:

Можно сделать два предположения:

$H_1 = \{\text{стреляет 1-й стрелок}\}$

$H_2 = \{\text{стреляет 2-й стрелок}\}$

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2$$

Рассмотрим событие : $A = \{\text{пуля попала в мишень}\}$

Известно, что : $P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = 0.00001.$

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень $P(A) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001$

Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз).
Действительно,

$$P(H_1|A) = \frac{1/2 \cdot 1}{1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001} = \frac{1}{1 + 0.00001}; \quad P(H_2|A) = \frac{1/2 \cdot 0.00001}{1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001} = \frac{0.00001}{1 + 0.00001}.$$

Задачи

4. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике находится 26 белых шаров, во втором 15 белых и 11 черных, в третьем ящике 26 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что белый шар вынут из первого ящика.

Решение:

Пусть **A** - событие, состоящее в том, что взятый шар окажется белым, а **H₁**, **H₂**, **H₃** - гипотезы, что шар был взят из 1-го, 2-го, 3-го ящика.

Вероятности указанных гипотез равны:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

Из условия задачи следует, что:

$$P(A | H_1) = 1;$$

$$P(A | H_2) = 15/26$$

$$P(A | H_3) = 0.$$

$$\begin{aligned} P(H_1 | A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3)} = \\ &= \frac{1/3 \cdot 1}{1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 15/26 + 1/3 \cdot 0} = \frac{26}{41} \end{aligned}$$

Предпоследняя задача

- 5. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что второй студент взял «хороший» билет.
- Решение:
- $A = \{\text{второй студент взял «хороший» билет}\}$
- $H_1 = \{\text{первый взял «хороший» билет}\},$
- $H_2 = \{\text{первый взял «плохой» билет}\}.$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) = \\ &= 5 / 25 * 4 / 24 + 20 / 25 * 5 / 24 = 1 / 5 \end{aligned}$$

Последняя задача

- 6. Из 10 учеников, пришедших на экзамен, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно и один совсем не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отличники могут ответить на все вопросы, хорошисты – на 16, троечники – на 10, а двоечники – на 5 вопросов. Каждый ученик получает 3 вопроса. Приглашенный первый ученик ответил на три вопроса. Какова вероятность, что он отличник?

Решение:

$A = \{\text{ученик ответил на три вопроса}\},$

$H_1 = \{\text{приглашенный ученик отличник}\},$

$H_2 = \{\text{ученик-хорошист}\},$

$H_3 = \{\text{ученик-троечник}\},$

$H_4 = \{\text{ученик-двоечник}\}.$

$$P(H_1) = 0,3;$$

$$P(H_2) = 0,4;$$

$$P(H_3) = 0,2;$$

$$P(H_4) = 0,1.$$

$$P(A | H_1) = 1;$$

$$P(A | H_2) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = 28/57;$$

$$P(A | H_3) = \frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = 2/19;$$

$$P(A | H_4) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = 1/114$$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 1}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 28/57 + 0,2 \cdot 2/19 + 0,1 \cdot 1/114} \approx 0,58$$

- **Вопросы:**
- Чему равна сумма вероятностей гипотез H для события A ?
- Чему равна сумма гипотез события A ?