

Решение экзамен. Задач

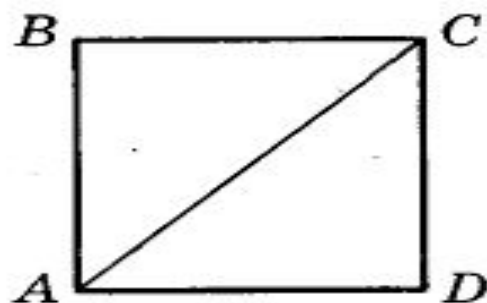
По теме призма, куб,
параллелепипед.

11 класс.

19. Ребро куба дорівнює 2 см. Знайдіть діагональ цього куба.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{2}$ см

Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 8.



20. Знайдіть кут між ребром A_1D_1 і діагоналлю BD куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

А	Б	В	Г	Д
45°	90°	30°	60°	Неможливо визначити

14. Діагональ куба дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
81 см^2	243 см^2	486 см^2	118 см^2	162 см^2

15. На рис. 9 зображено розгортку поверхні тіла, складену з шести парно рівних прямокутників, розміри яких у сантиметрах вказано на рисунку. Знайдіть об'єм цього тіла.

А	Б	В	Г	Д
120 см^3	100 см^3	150 см^3	144 см^3	Інша відповідь

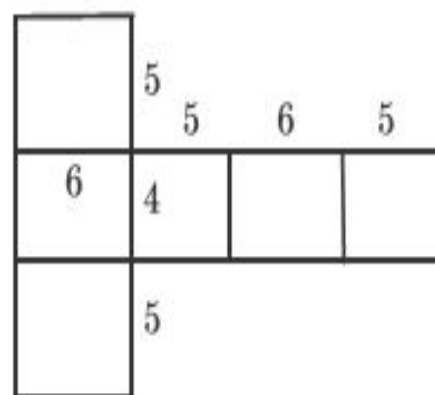


Рис. 9

18. Обчисліть довжину висоти прямої призми, в основі якої лежить ромб із діагоналями 6 см та 8 см, якщо довжина більшої діагоналі призми дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{7}$ см	10 см

- 16.** В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 5 см та основами 2 см і 8 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
90 см ²	100 см ²	110 см ²	130 см ²	170 см ²

- 17.** Обчисліть довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої лежить ромб зі стороною 4 м та гострим кутом 60°. Висота призми становить 3 м.

А	Б	В	Г	Д
3 м	4 м	5 м	20 м	$\sqrt{37}$ м

24. Установіть відповідність між многогранниками (1–4) та їх об'ємами (А–Д).

1 Куб із ребром 4

А 9

2 Прямокутний паралелепіпед із вимірами 3, 4, 5

Б 10

3 Пряма трикутна призма, висота якої 10, а основою є прямокутний трикутник з катетами 3 і 4

В 20

Г 60

Д 64

4 Правильний тетраедр з ребром $3\sqrt{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

38. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 , 40 см^2 і 50 см^2 . Знайдіть об'єм паралелепіпеда (у см^3).

Відповідь: _____

39. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори з розрахунку: три одиниці на 50 м^3 . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити на новий будинок, якщо він має форму прямокутного паралелепіпеда розміром $15 \text{ м} \times 20 \text{ м} \times 30 \text{ м}$?

Відповідь: _____

41. Основою прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є паралелограм $ABCD$, у якому $AD = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Об'єм паралелепіпеда дорівнює 30. Обчисліть висоту паралелепіпеда.

Відповідь: _____

44. Висота прямої призми $ABCA_1 B_1 C_1$ дорівнює 36. Основа призми — трикутник ABC , площа якого дорівнює 12, $AB = 5$. Знайдіть тангенс кута між площиною ABC_1 і площиною основи призми.

11. Знайдіть площу повної поверхні куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

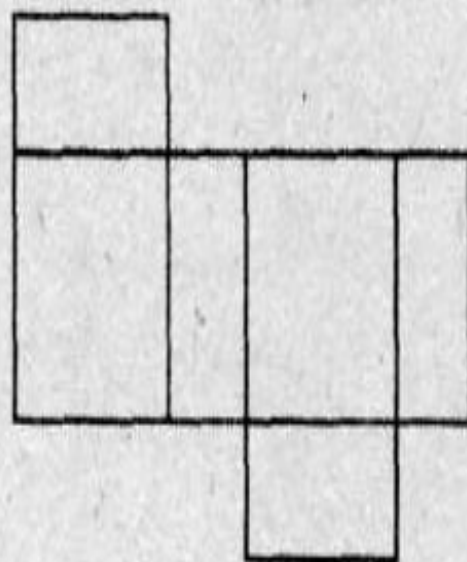
12. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а периметр її бічної грані – 22 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

22. На скільки відсотків зменшиться об'єм куба, якщо його сторону зменшити на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 20%	на 10%	на 40%	на 48,8%	на 49,8%

24. На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, складеного з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжина сторін яких дорівнює 3 см і 6 см. Визначте об'єм цього тіла.

А	Б	В	Г	Д
108 см^3	54 см^3	144 см^3	36 см^3	Інша відповідь



12. Знайдіть висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 26, а сторони основи становлять 6 і 8.

А	Б	В	Г	Д
8	10	12	20	24

46. Основа прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — паралелограм $ABCD$, у якому $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle BCD = 135^\circ$. Висота призми дорівнює 3. Знайдіть тангенс кута між площиною основи призми і площиною $A_1 DC$.

Відповідь: _____

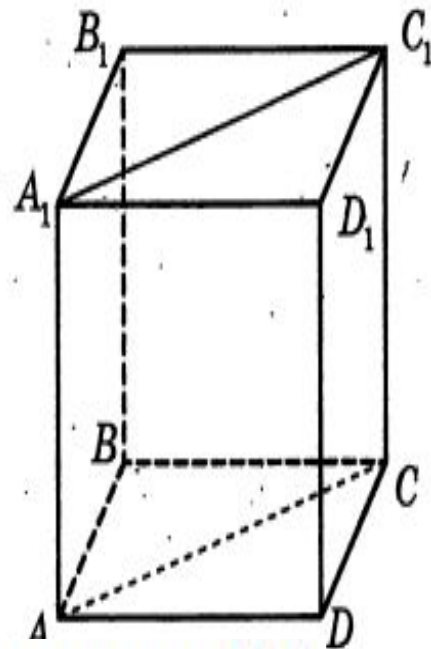
47. Основа прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$ з кутом 150° і стороною, яка дорівнює 10. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною ABC_1 дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.

Відповідь: _____

48. Основа прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$ з кутом 150° і стороною, яка дорівнює 2. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною ABC_1 дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.

18. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром 2. Знайдіть відстань між площиною $AA_1 C_1 C$ і прямою DD_1 .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	2	1



19. Знайдіть об'єм конуса, радіус якого дорівнює 6 і утвореного з площини.

31. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1 B_1 C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC , де $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC . Визначте об'єм призми (у см^3), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см^2 .

28. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Установіть відповідність між заданими кутами (1—4) і їхніми градусними мірами (А—Д).

1 Кут між прямими BC_1 і AD_1

2 Кут між прямими DC_1 і BA_1

3 Кут між прямими $D_1 B_1$ і DC_1

4 Кут між прямими AD і CC_1

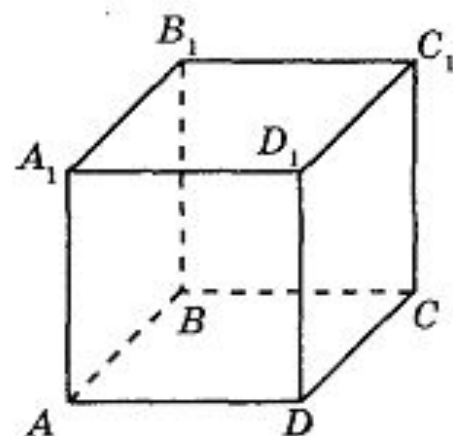
А 0°

Б 60°

В 30°

Г 90°

Д 45°



18. Прямокутний паралелепіпед має ребра завдовжки 1 см, 2 см і 3 см. Знайдіть об'єм даного паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
9 см ³	6 см ³	18 см ³	5 см ³	Інша відповідь

- 20.** Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, у якій висота дорівнює стороні основи — 2 см.

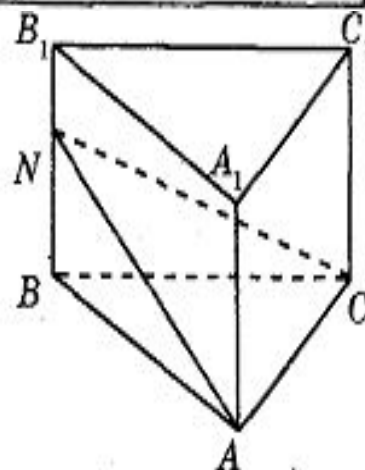
А	Б	В	Г	Д
2 см^2	12 см^2	4 см^2	24 см^2	$2\sqrt{3} + 12 \text{ см}^2$

- 18.** Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Площа бічної грані цієї призми дорівнює 48 см^2 . Обчисліть діагональ бічної грані.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$6\sqrt{2} \text{ см}$	10 см	12 см

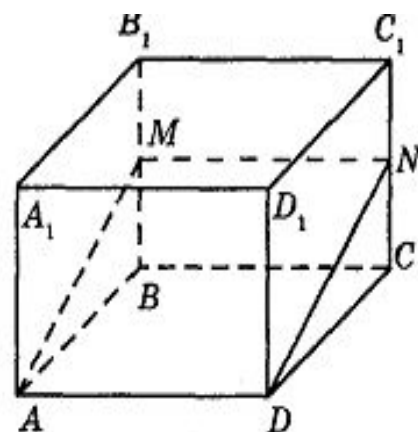
- 25.** Об'єм прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 48 см^3 . Точка N ділить ребро BB_1 у відношенні 5:3, рахуючи від вершини B (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди $ABCN$.

А	Б	В	Г	Д
16 см^3	24 см^3	3 см^3	10 см^3	24 см^3



25. Об'єм прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 56 см^3 (див. рисунок). У паралелепіпеді проведено переріз так, що $CN = NC_1$. Знайдіть об'єм призми $ABMDCN$.

А	Б	В	Г	Д
4 см^3	7 см^3	8 см^3	28 см^3	14 см^3

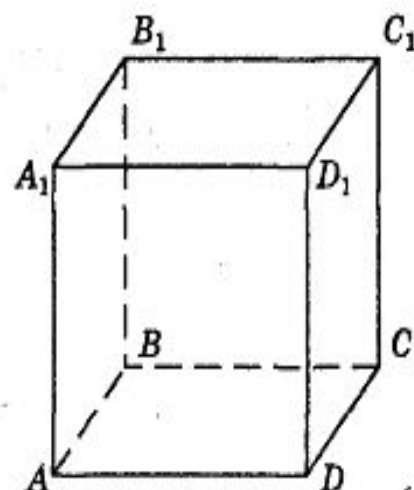


18. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його нижньої основи дорівнює 4 см .

А	Б	В	Г	Д
$(4 + 2\sqrt{2}) \text{ см}$	$2\sqrt{6} \text{ см}$	$4\sqrt{2} \text{ см}$	24 см	Інша відповідь

18. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть кут між площинами $ACC_1 A_1$ і $BDD_1 B_1$.

А	Б	В	Г	Д
45°	30°	90°	120°	60°

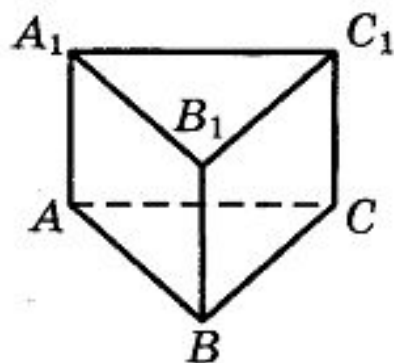


15. Визначте відстань від вершини A куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ до площини $BDD_1 B_1$, якщо ребро куба дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

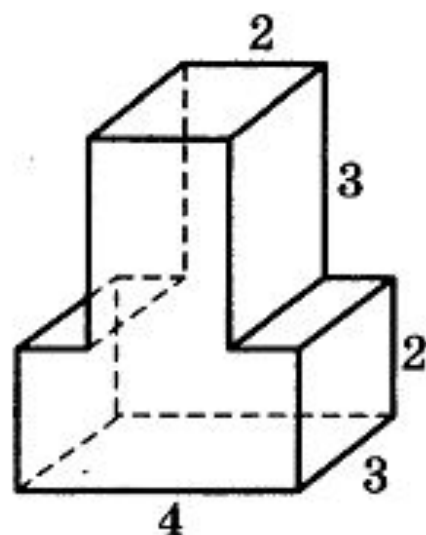
А	Б	В	Г	Д
7 см	4 см	6 см	12 см	$6\sqrt{2}$ см

Діагональ правильної чотирёхугольної призми нахилена к плоскості основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

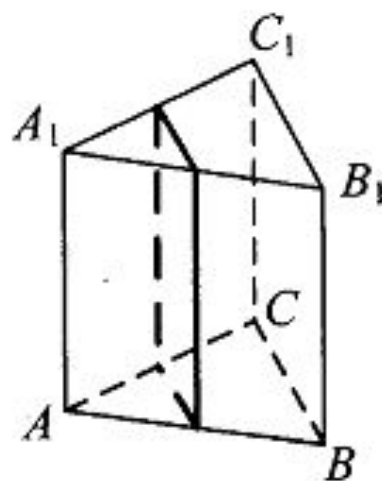
В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ со стороной $3\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .



Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 11. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .



24. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної призми, діагональ основи якої дорівнює 5 см, а висота призми — 4 см.

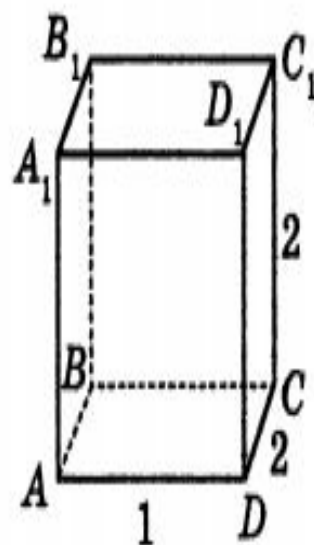
А	Б	В	Г	Д
20 см ³	30 см ³	50 см ³	100 см ³	120 см ³

24. Бічне ребро похилої призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см і нахилене до площини основи під кутом 45° . Знайдіть проекцію бічного ребра на площину основи.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$ см	2 см	1 см	$\sqrt{2}$ см	$\sqrt{3}$ см

28. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед та вказано його розміри. Установіть відповідність між геометричними величинами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

- | | | | |
|---|---|---|----|
| 1 | діагональ прямокутного паралелепіпеда | А | 2 |
| 2 | площа бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда | Б | 3 |
| 3 | площа поверхні прямокутного паралелепіпеда | В | 4 |
| | | Г | 16 |
| | | Д | 20 |
| 4 | об'єм прямокутного паралелепіпеда | | |

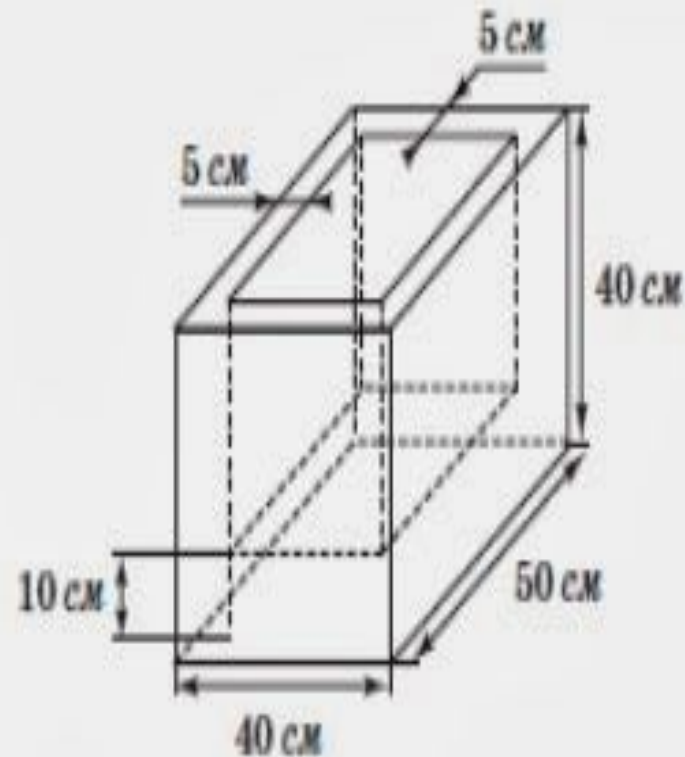


	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

24. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб з діагоналями 10 см і 18 см, а бічне ребро призми дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
500 см ³	450 см ³	800 см ³	900 см ³	1000 см ³

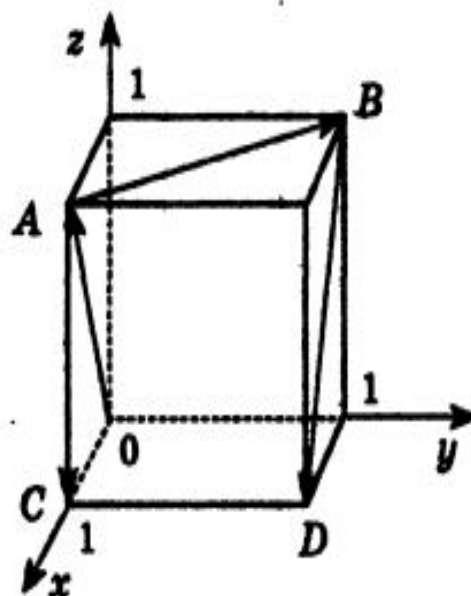
19. На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см і 50 см (див. рисунок). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об'єм бетону (у м^3) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утра-тою бетону під час виготовлення знехтуйте.



А	Б	В	Г	Д
0,32 м^3	0,33 м^3	0,36 м^3	0,44 м^3	0,8 м^3

На рисунку зображено куб з ребром 1. Установіть відповідність між векторами, зображеними на рисунку (1–4), та їхніми координатами (А–Д).

- | | | | |
|---|-----------------|---|--------------|
| 1 | $\overline{AB}$ | А | $(0; 1; 0)$ |
| 2 | $\overline{AC}$ | Б | $(0; 0; -1)$ |
| 3 | $\overline{BD}$ | В | $(-1; 1; 0)$ |
| 4 | $\overline{OA}$ | Г | $(1; 0; -1)$ |
| | | Д | $(1; 0; 1)$ |



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

35. Якщо кожне ребро куба збільшити на 1 м, то його об'єм збільшиться в 125 разів. Знайдіть ребро куба (у м).

Відповідь: _____

Объем прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, равен 16 см^3 . У второго прямоугольного параллелепипеда, в основании которого тоже лежит квадрат, высота в четыре раза меньше, а ребро основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объем второго прямоугольного параллелепипеда (в кубических сантиметрах).

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки D до плоскости CAD_1 .

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна $\sqrt{3}$, боковое ребро равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды $MABC$, если точка M — середина ребра AA_1 .

36. В основі прямої призми з висотою 4 см лежить квадрат зі стороною 3 см. У призмі через вершину основи перпендикулярно до діагоналі бічної грані побудовано переріз. Знайдіть об'єм меншої з утворених призм, у см^3 .

Розв'язання.

Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — дана призма (див. рисунок).

Перерізом призми є прямокутник $ADKN$, оскільки площина α , що перетинає дві паралельні площини, утворює паралельні прямі $AN \parallel DK$ і $AD \parallel NK$. $AD \perp DC$ і $AD \perp DD_1$, отже, $AD \perp DK$, тому переріз утворює дві призми: одну — з основою DCK і висотою AD , другу — з основою $DD_1 C_1 K$ (яка є трапецією) і висотою AD .

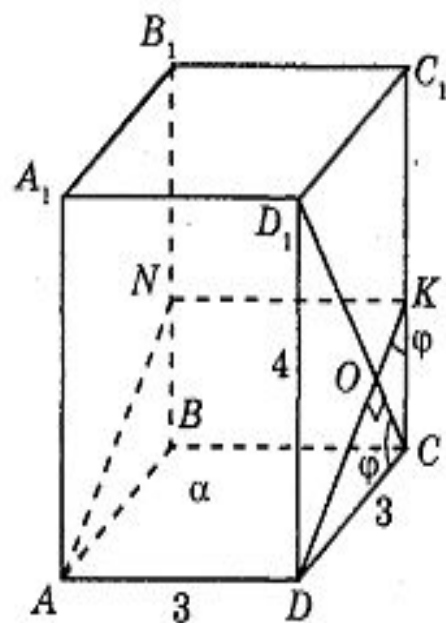
Знайдемо площі трикутника DCK і трапеції $DD_1 C_1 K$ й зрівняємо їх.

$$\triangle DD_1 C: \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}; \quad \angle D_1 CD = \angle DCK = \varphi, \quad KC = \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}.$$

$$S_{\triangle DCK} = 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{8}.$$

$$S_{DD_1 C_1 K} = S_{DD_1 C_1 C} - S_{\triangle DCK} = 12 - \frac{27}{8} = \frac{69}{8} > \frac{27}{8}.$$

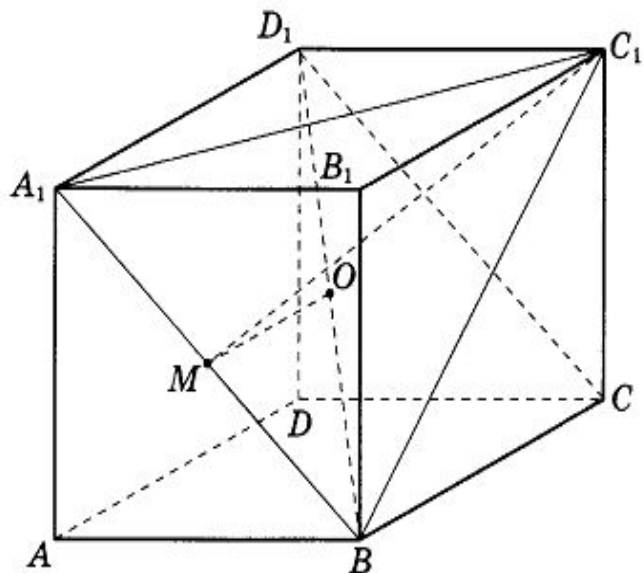
$$V_{ANB DCK} = S_{\triangle DCK} \cdot AD = \frac{27}{8} \cdot 3 = \frac{81}{8} = 10,125 (\text{см}^3). \text{ Відповідь: } 10,125.$$



Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B , A_1 , и D_1 .

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1 .



Решение.

а) Так как BC параллельно A_1D_1 , то точка C лежит в плоскости BA_1D_1 . Прямоугольник BCD_1A_1 — искомое сечение.

б) Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B .

$A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1 , поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1 .

Найдём стороны треугольника OMC_1 . Из треугольника BA_1D_1 находим $OM = \frac{1}{2}$;

из треугольника BA_1C_1 находим $MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку O — середина диагонали AC_1 .

Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos \angle OMC_1 = \frac{OM^2 + C_1M^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:2$.

- Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .
- Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Решение.

а) Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

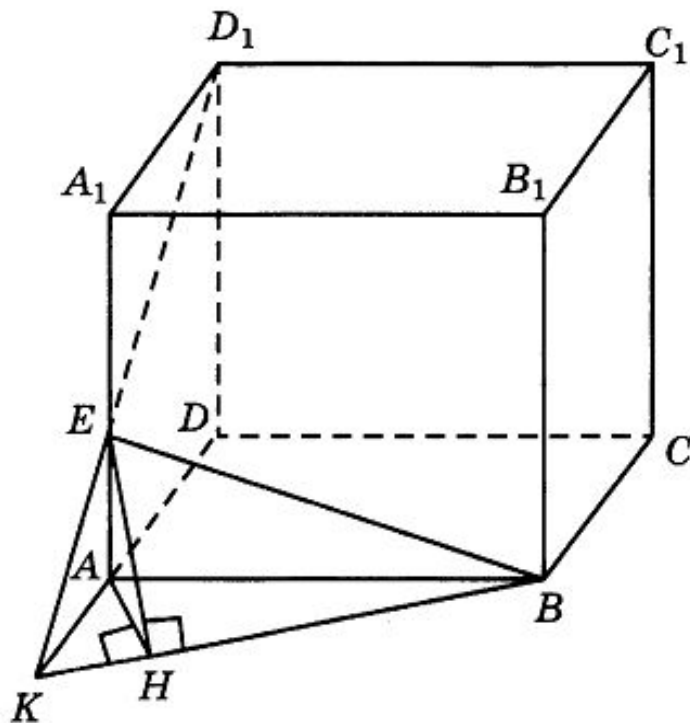
б) Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE:EA_1=1:2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$



В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB=2$; $AK=1$;
 $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left(\sin \angle AHE = \frac{\sqrt{5}}{3}; \cos \angle AHE = \frac{2}{3} \right)$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$