Решение задач на нахождение расстояний и углов в пространстве координатным методом

Учитель математики

МБОУ-СОШ №7 г.Клинцы Брянской области

Коваленко С.Ф.

Ответы для самопроверки математического диктанта

Математический диктант

$Дано: \ \vec{a}\,(a_1, a_2, a_3), \ \vec{b}\,(в_1, в_2, в_3)$

Записать в координатах :

1. Условие коллинеарности двух векторов.
2. Условие перпендикулярности двух векторов.
3. Формулу для нахождения косинуса угла между векторами.
4. Формулу для нахождения длины вектора.
5. Уравнение плоскости.

1. $\dfrac{a_1}{в_1} = \dfrac{a_2}{в_2} = \dfrac{a_3}{в_3} = \lambda$

2. $a_1 в_1 + a_2 в_2 + a_3 в_3 = 0$

3. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

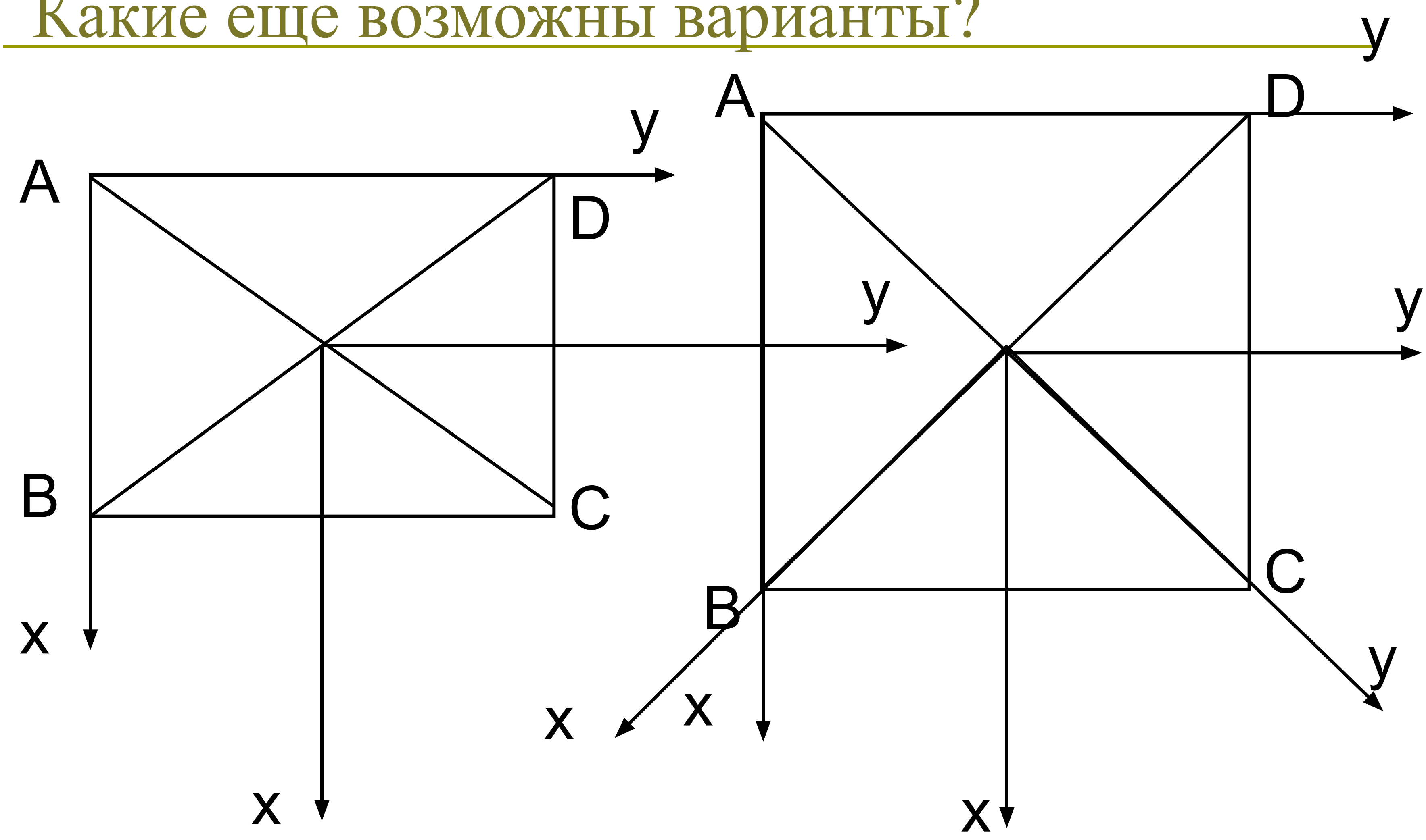
4. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

5. $Ax + By + Cz + D = 0$

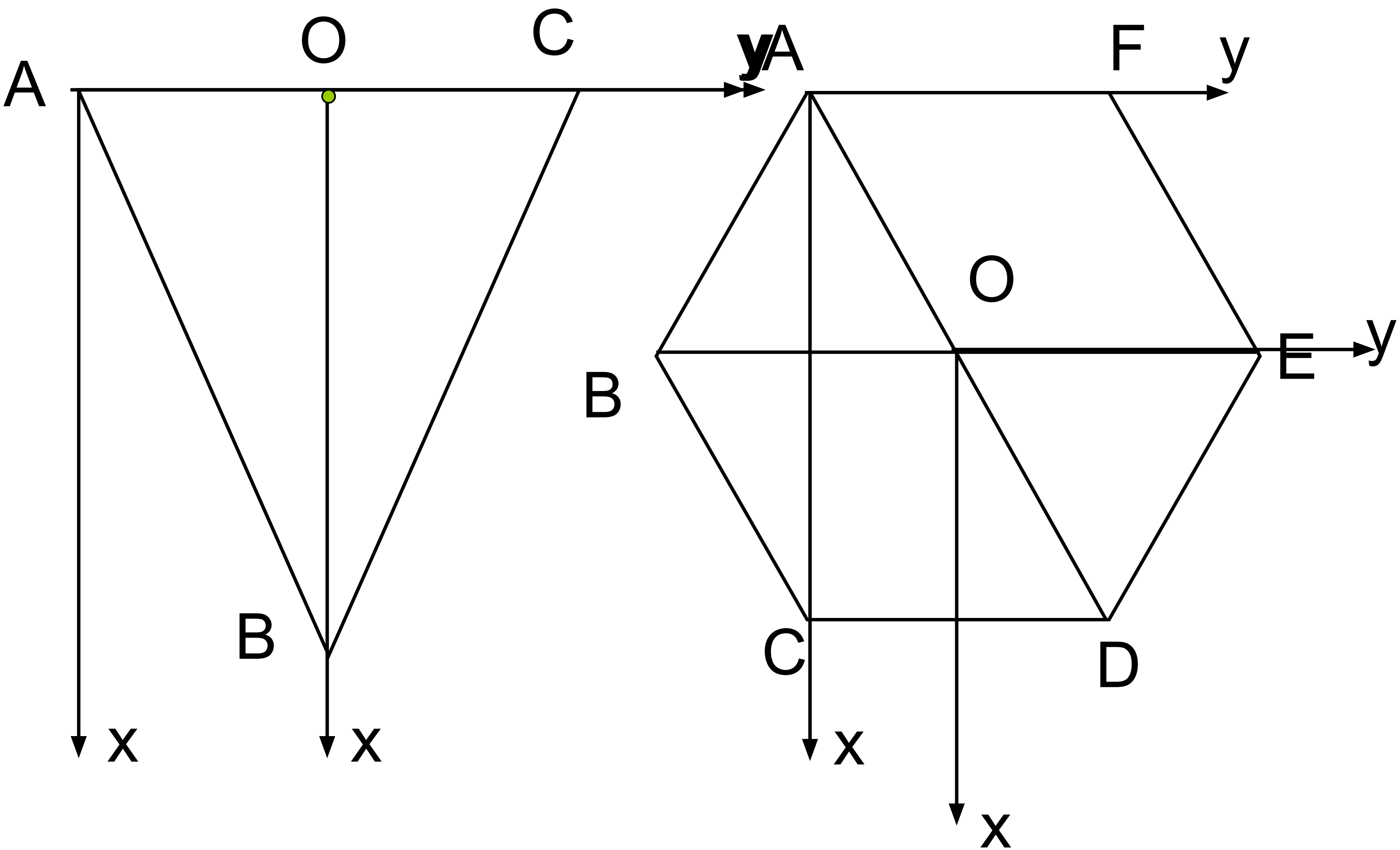
Алгоритм решения задач

1. Ввести прямоугольную систему координат - на плоскости основания многогранника; - в пространстве.
2. Найти координаты точек, о которых идет речь в условии задачи.
3. Найти координаты - направляющих векторов прямых; - векторов, перпендикулярных плоскостям (нормалей).
4. Воспользоваться соответствующей формулой для нахождения - расстояний в пространстве; - углов в пространстве.

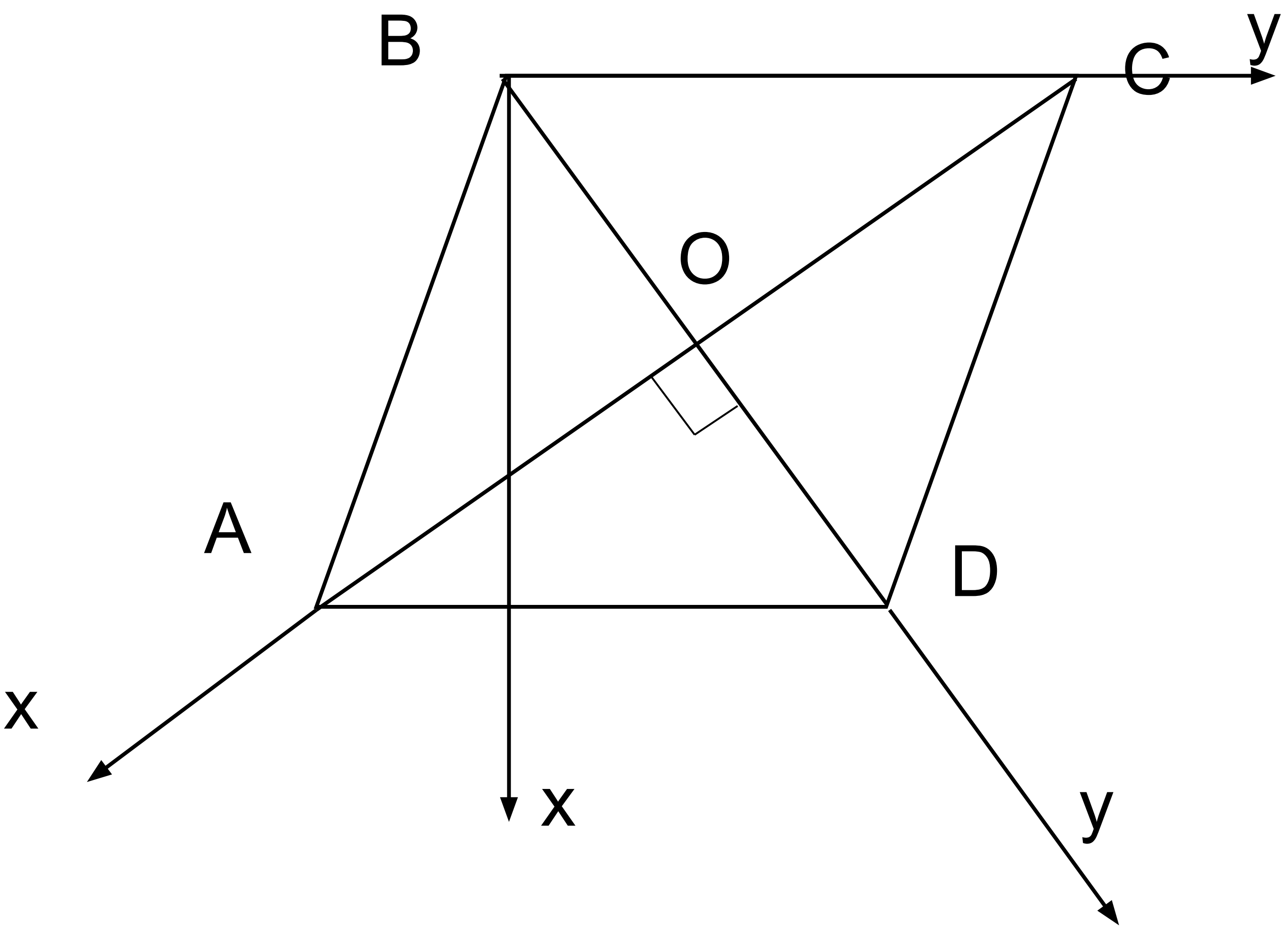
Введите прямоугольную систему координат, если в основании многогранника лежит...
Какие еще возможны варианты?



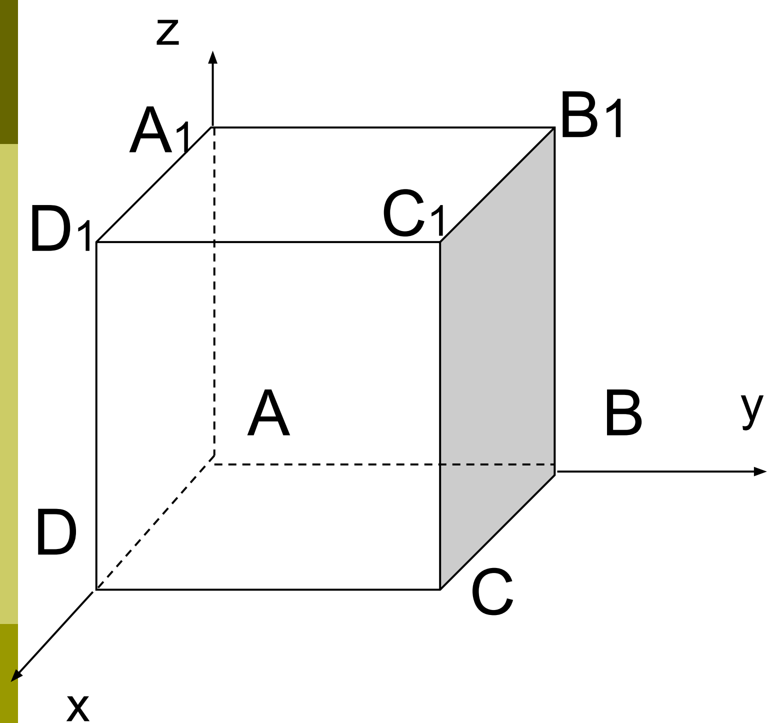
Введите прямоугольную систему координат , если в основании многогранника лежит...

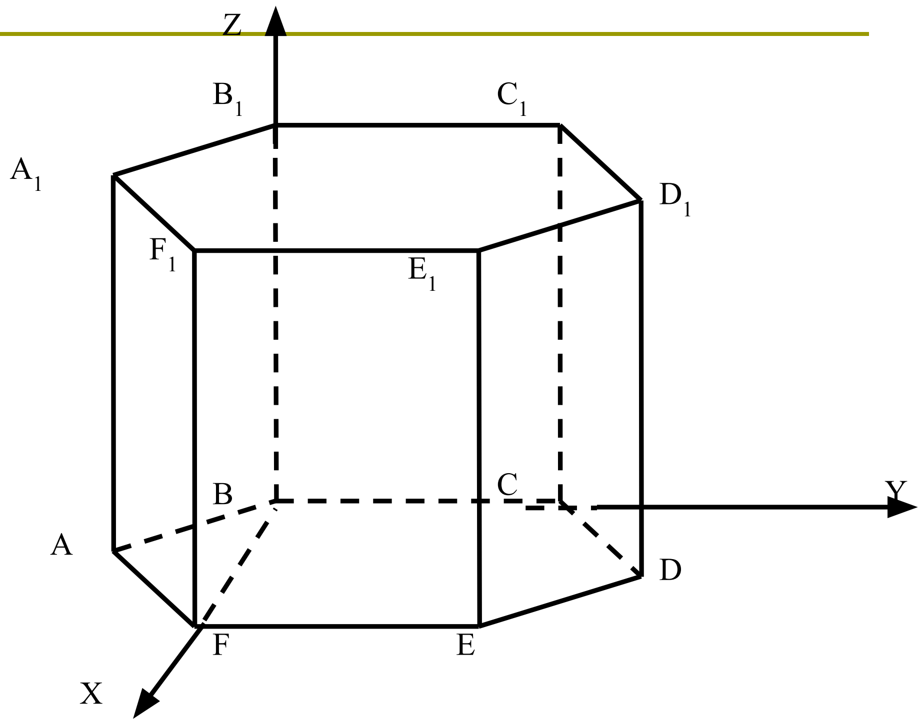


Введите прямоугольную систему координат, если в основании многогранника лежит...

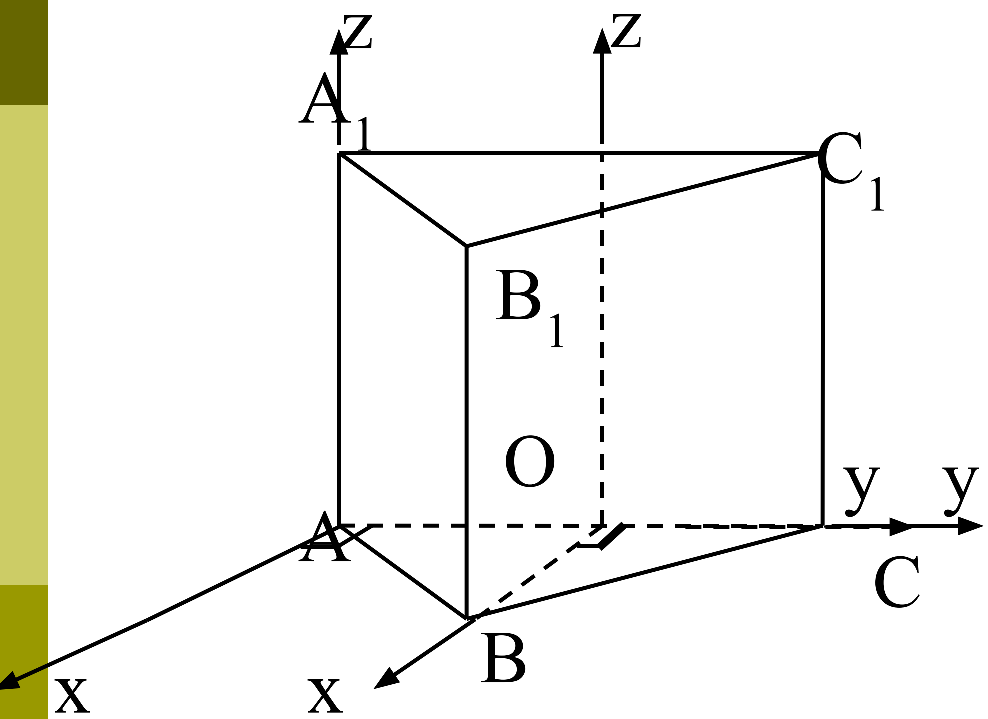


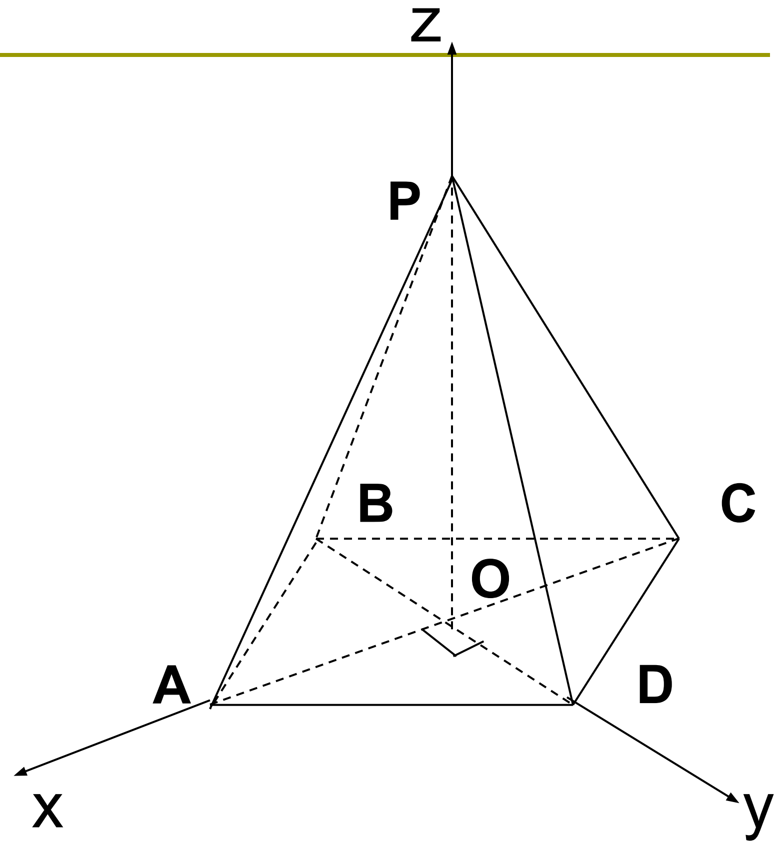
Введите прямоугольную систему координат.





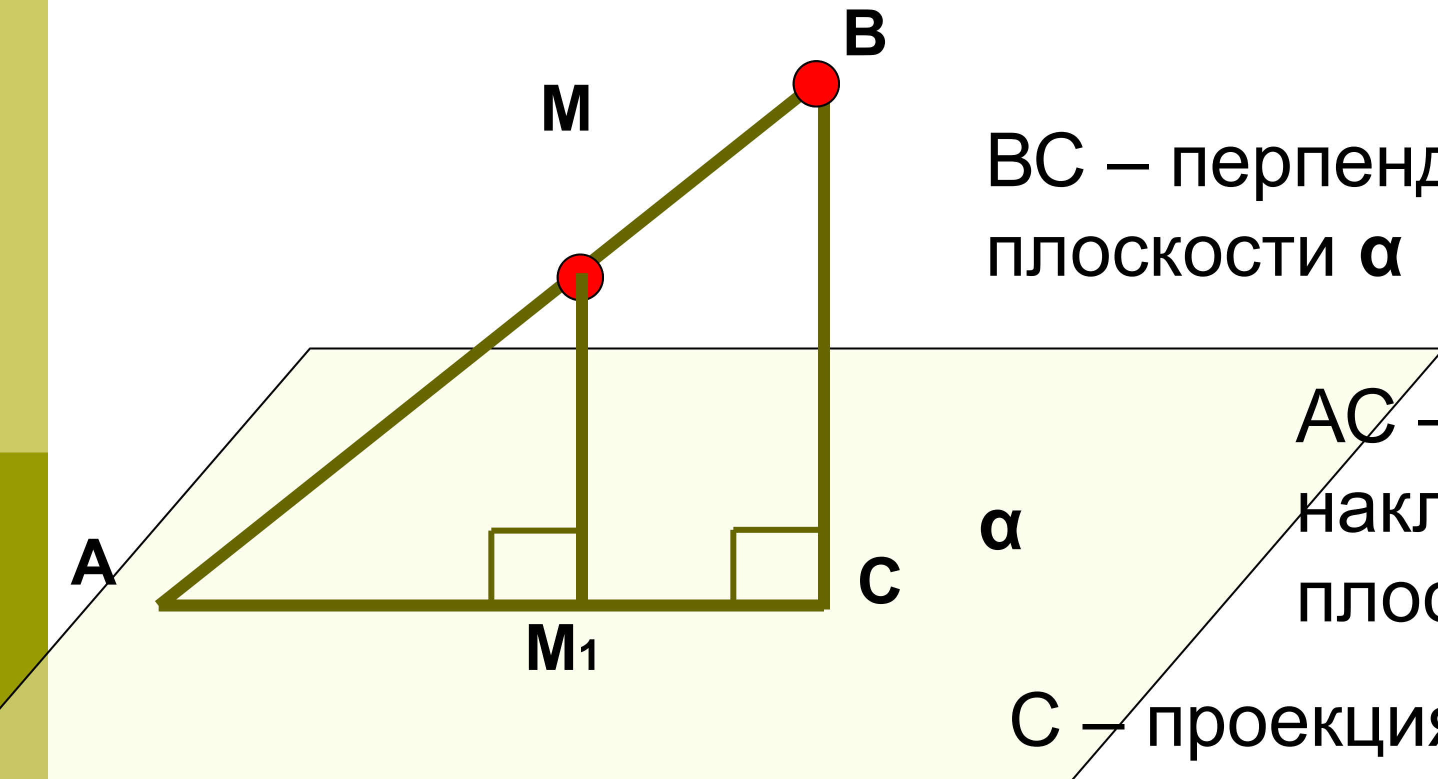
Введите прямоугольную систему координат.





Назовите наклонную к плоскости α, ее проекцию на плоскость, проекции точек В и М.

АВ – наклонная к плоскости **α**



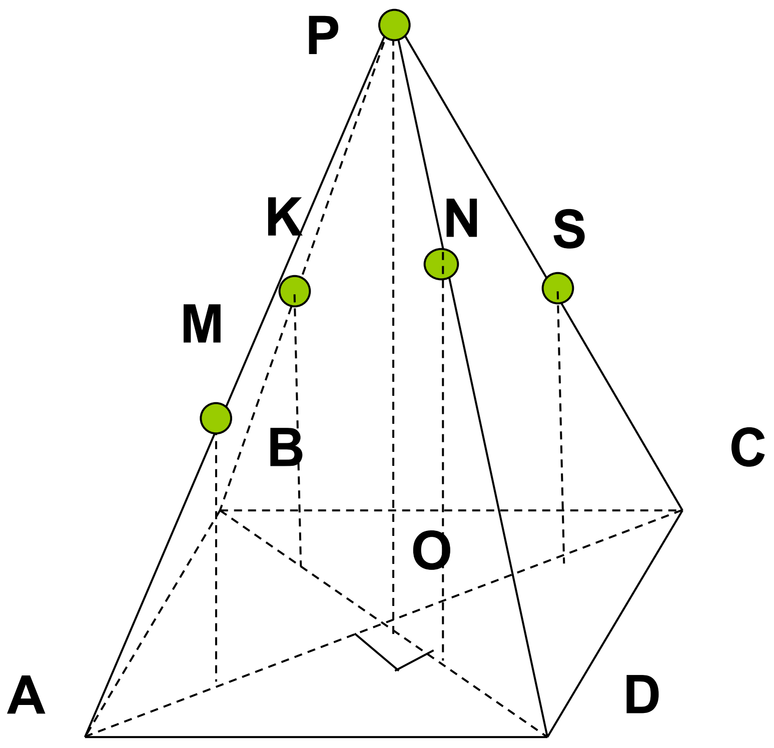
ВС – перпендикуляр к плоскости **α**

АС – проекция наклонной АВ на плоскость **α**

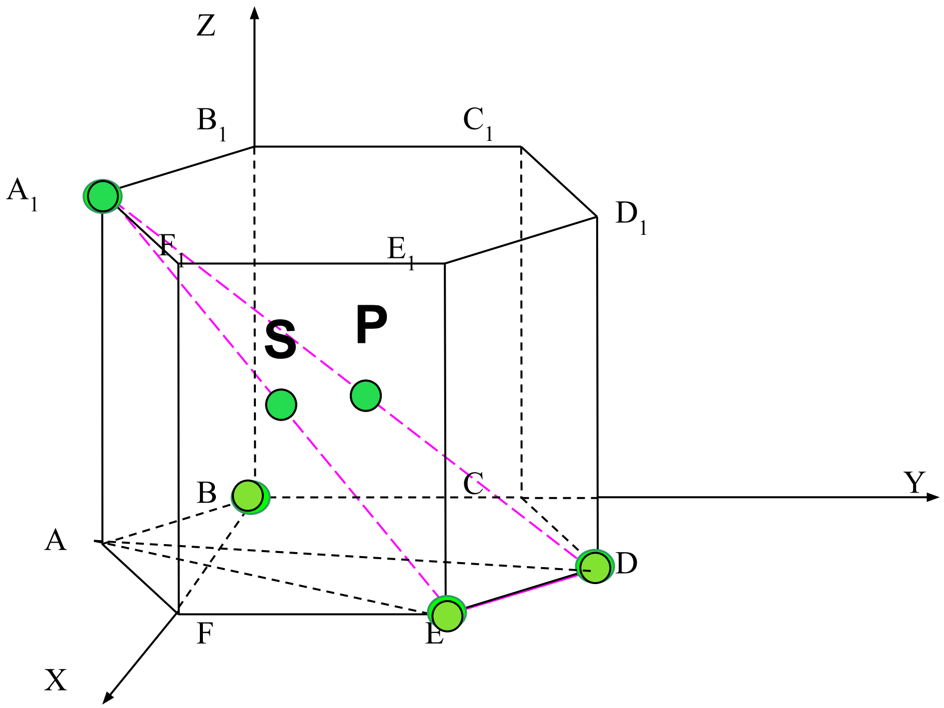
С – проекция точки В

M_1 – проекция точки М

На какие отрезки в плоскости основания попадают проекции точек P, M, S, K, N?



На какие отрезки в плоскости основания попадают проекции точек A1, S, P? Почему?



Проекциями каких точек являются точки

B, E, D в плоскости основания призмы?

Составьте уравнение плоскости по 3 точкам:

1. $A(0, -\frac{1}{2}, 0)$, $D(0, \frac{1}{2}, 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 2)$.

$Ax + By + Cz + D = 0$ – *общий вид уравнения плоскости.*

$$(ADB_1): \begin{cases} A\cdot 0 - B\cdot\frac{1}{2} + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot\frac{1}{2} + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + B\cdot 0 + C\cdot 2 + D = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2D, \\ C = -2D, \\ A = 2\sqrt{3}D. \end{cases}$$

$$2\sqrt{3}xD + 2yD - 2zD = 0,$$

$$2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ. $2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$

Составьте самостоятельно уравнения координатных плоскостей

2. *Уравнение плоскости* yOz : $x = 0.$

Уравнение плоскости xOz : $y = 0.$

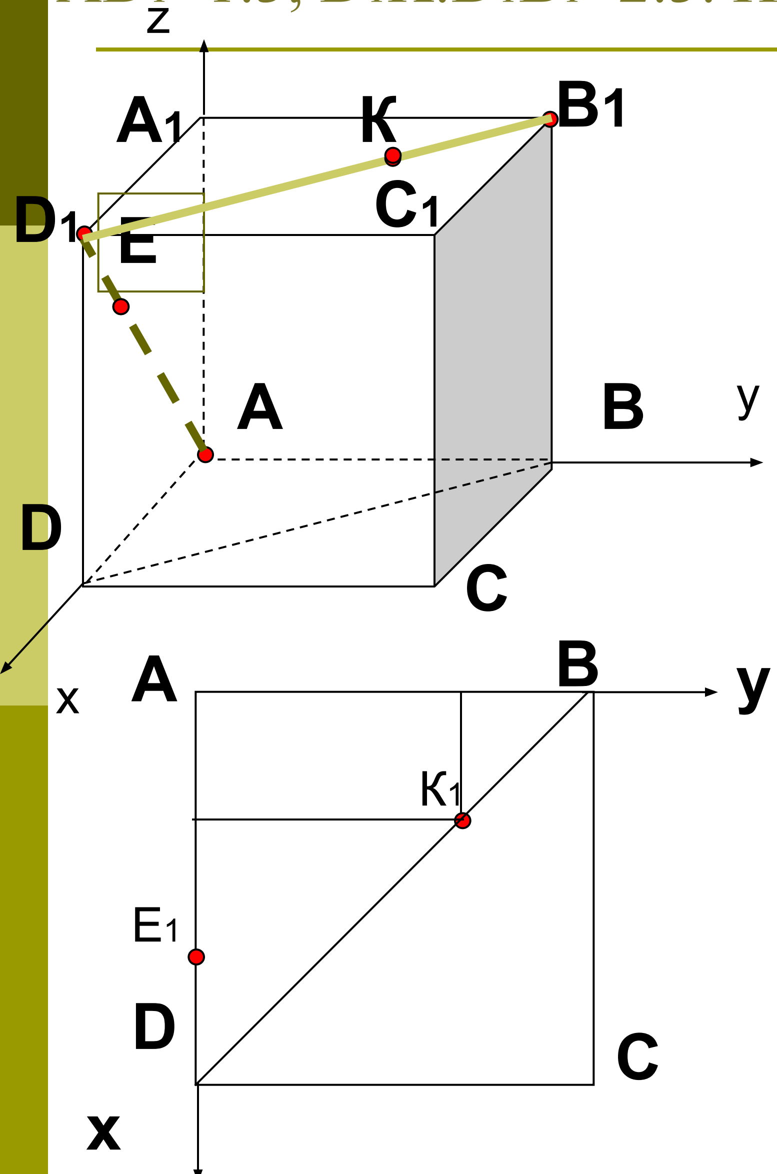
Уравнение плоскости xOy : $z = 0.$

3. *Вектор нормали к плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ *имеет координаты* $\{A; B; C\}$ *и обозначается* $\vec{n}\{A; B; C\}.$

Найдите координаты векторов нормалей к координатным плоскостям и плоскости $ADB_1.$

$$\overrightarrow{n_1}\{1;\ 0;\ 0\},\quad \overrightarrow{n_2}\{0;\ 1;\ 0\},\quad \overrightarrow{n_3}\{0;\ 0;\ 1\},\quad \vec{n}\left\{2\sqrt{3};\ 2;\ -2\right\}$$

Решите задачу. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона которого равна 3, на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и K так, что $D_1E:AD_1=1:3$, $D_1K:D_1B_1=2:3$. Найдите длину отрезка DK.



Решение.

1. *Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, как показано на рисунке.*

2. *Найдем координаты точек E и K с помощью их проекций на плоскость основания.*

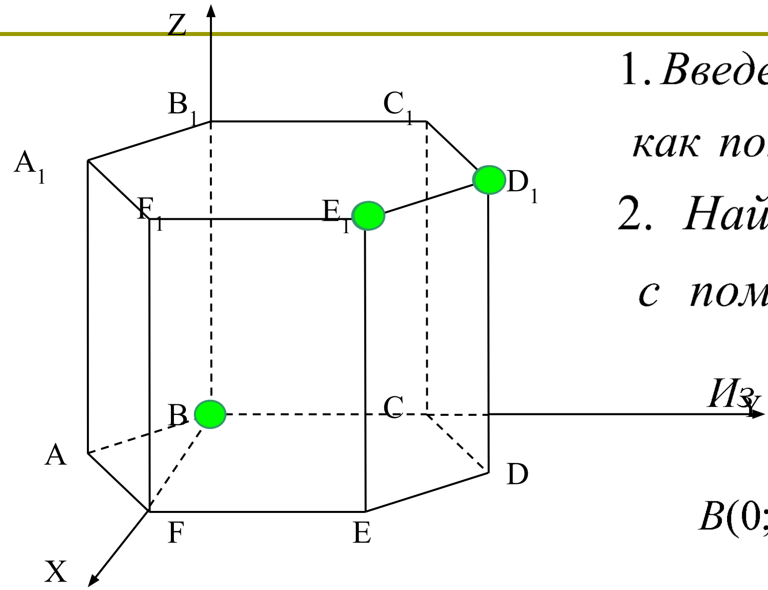
$$A(0,0,0),\ E_1(2,0,0),\ E(2,0,2),\ K_1(1,2,0),\ K(1,2,3)$$

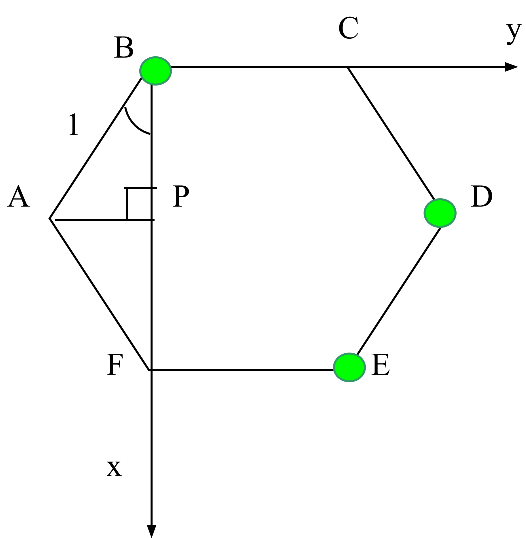
3. $$EK=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$EK=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Ответ. $EK=\sqrt{6}.$

Решите задачу. В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки *B* до точек E1, D1.





1. *Введем систему координат с началом в точке B, как показано на рисунке.*

2. *Найдем координаты точек* E_1 *и* D_1 *с помощью их проекций на плоскость основания.*

$$\text{Из } \Delta ABP: \angle P = 90°, \angle B = 30°, AB = 1, BP = \frac{\sqrt{3}}{2}, AP = \frac{1}{2}.$$

$$B(0;0;0),\ E(\sqrt{3};1;0),\ E_1(\sqrt{3};1;1),\ D(\frac{\sqrt{3}}{2};1{,}5;0),\ D_1(\frac{\sqrt{3}}{2};1{,}5;1).$$

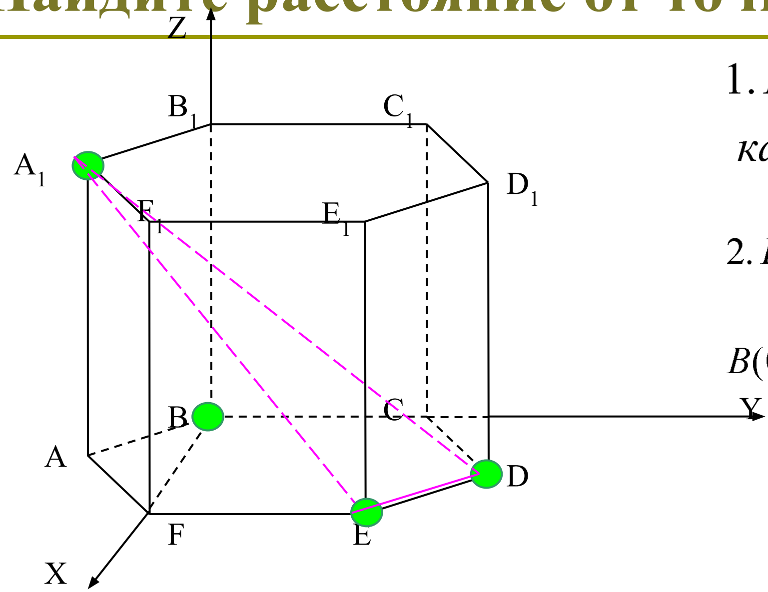
$$3.\ BE_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

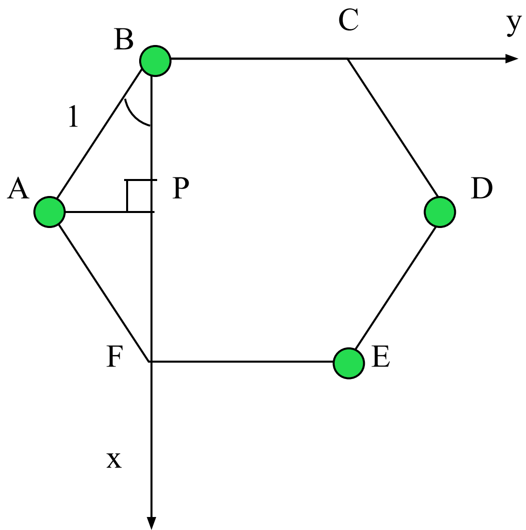
$$BE_1 = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$BD_1 = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2 + (1{,}5 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 2.$$

Ответ. $\sqrt{5},\ 2.$

500013. В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1 все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки *B* до плоскости DEA1.





1. *Введем систему координат с началом в точке B как показано на рисунке.*

2. *Из* $\Delta ABP: \angle P = 90°, \angle B = 30°, AB = 1, BP = \frac{\sqrt{3}}{2}, AP = \frac{1}{2}.$

$B(0;0;0),\ A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1),\ D(\frac{\sqrt{3}}{2};1{,}5;0),\ E(\sqrt{3};1;0)$

3. *Составим уравнение плоскости* DEA_1:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + y + 2z - 2 = 0,$$

$\vec{n}\{\frac{1}{\sqrt{3}};1;2\}$ – *вектор нормали к плоскости*

4. $\rho(B, DEA_1) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$

$$\rho(B, DEA_1) = \frac{|-2|}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

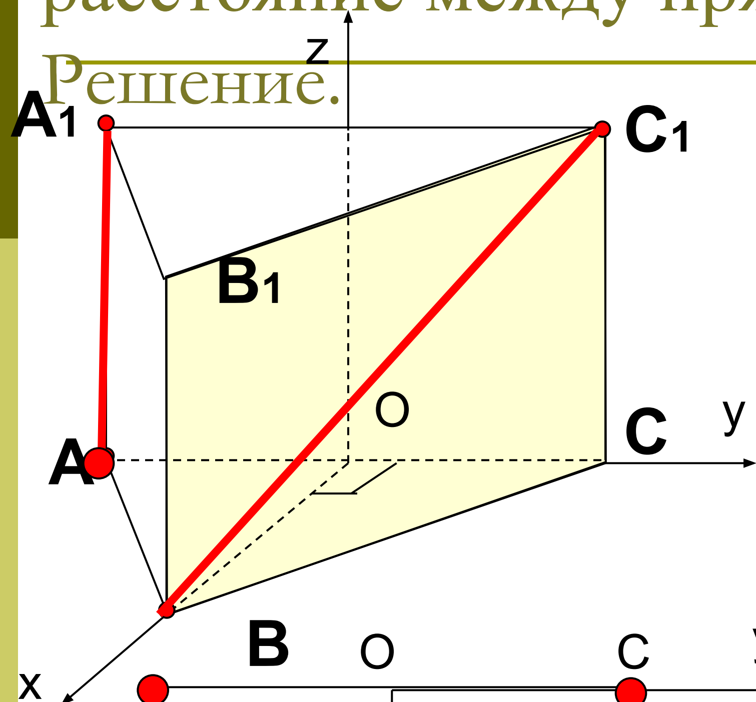
Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

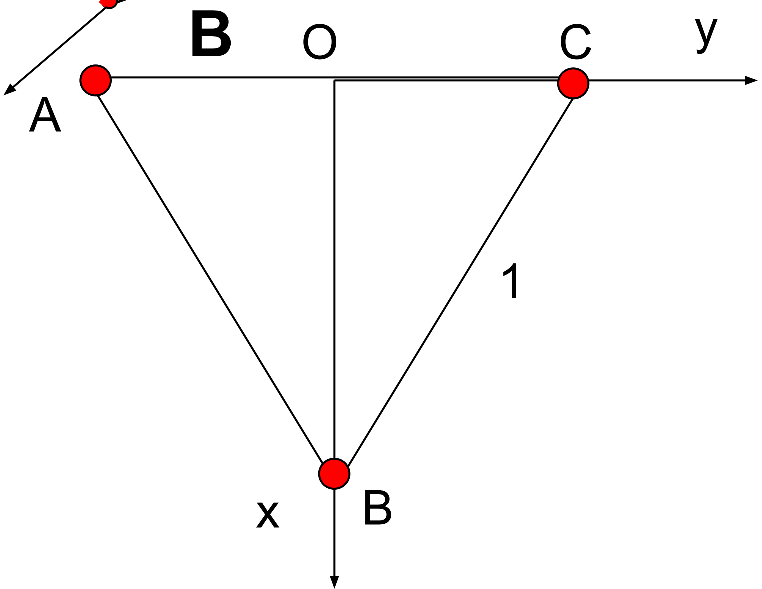
484577. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

Решение.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки на одной прямой до плоскости, содержащей вторую прямую и параллельной первой прямой.

Найдем расстояние от точки А до плоскости BCC_1





1. Введем систему координат с началом в точке О, как показано на рисунке.

2. *Из равностороннего треугольника ABC имеем: т.к. BO – медиана и высота, то*

$$BO=\sqrt{BC^2-OC^2},\ \ BO=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0,-\frac{1}{2},0),\ \ B(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0),\ \ C(0,\frac{1}{2},0),\ \ C_1(0,\frac{1}{2},1).$$

3. *Составим уравнение плоскости* (BCC_1):

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y+1=0.$$

$$\vec{n}\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}};-2;\ 0\right\}$$

4. $$\rho(A;\ BCC_1)=\frac{|Ax_0+By_0+cZ_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

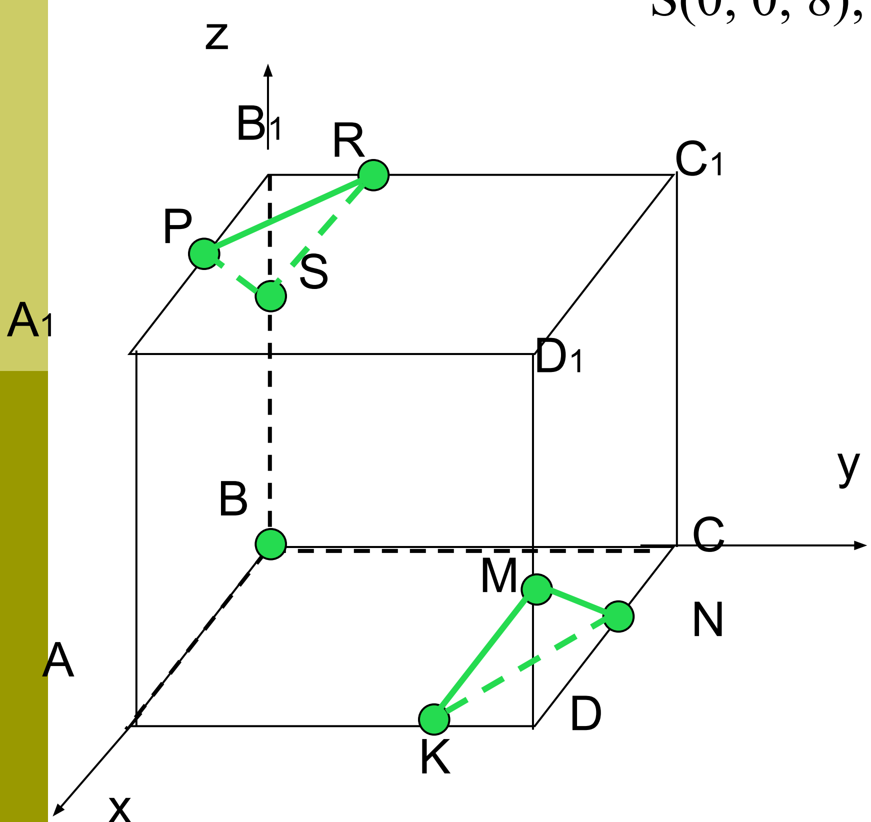
$$\rho(A;\ BCC_1)=\frac{|0+1+1|}{\sqrt{\frac{4}{3}+4+0}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решите задачу. Найдите расстояние между плоскостями сечений куба (PRS) и (NKM), ребро которого 12, где DN:NC=A1P:PB1=1:2, B1S:SB=D1M:MD1=1:3, B1R:RC1=DK:KA=1:4. Решение.

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B, как показано на рисунке.

2. B(0; 0; 0); P(6; 0; 12); R(0; 3; 12); S(0; 0; 8); N(6; 12; 0); K(12; 9; 0); M(12; 12; 4)



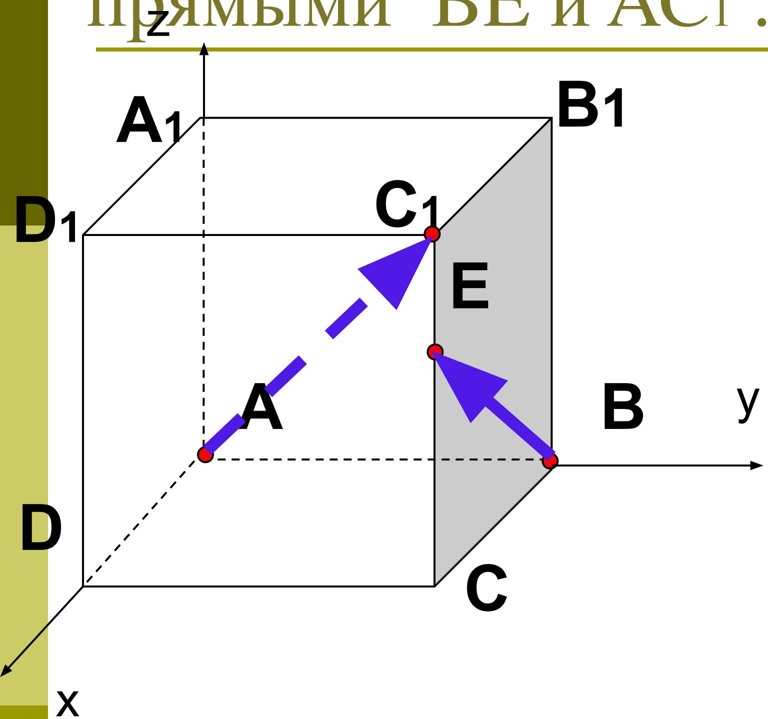
3. Уравнение плоскости (PRS) имеет вид 2x+4y-3z+24=0, а уравнение плоскости (NKM) 2x+4y-3z-60=0, значит, плоскости параллельны.

$$4.\quad \rho(PRS;\ NKM) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rho(PRS;\ NKM) = \frac{|24 + 60|}{\sqrt{4 + 16 + 9}} = \frac{84}{\sqrt{29}}.$$

$$Ответ:\ \frac{84}{\sqrt{29}}.$$

500387. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=2:1$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.



1. *Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, как показано на рисунке. Пусть сторона куба равна* 3.

2. $A(0,0,0),\ B(0,3,0),\ E(3,3,2), C_1(3,3,3)$

3. *Направляющие векторы прямых* $\overrightarrow{AC_1}\{3,3,3\},\ \overrightarrow{BE}\{3,0,2\}$.

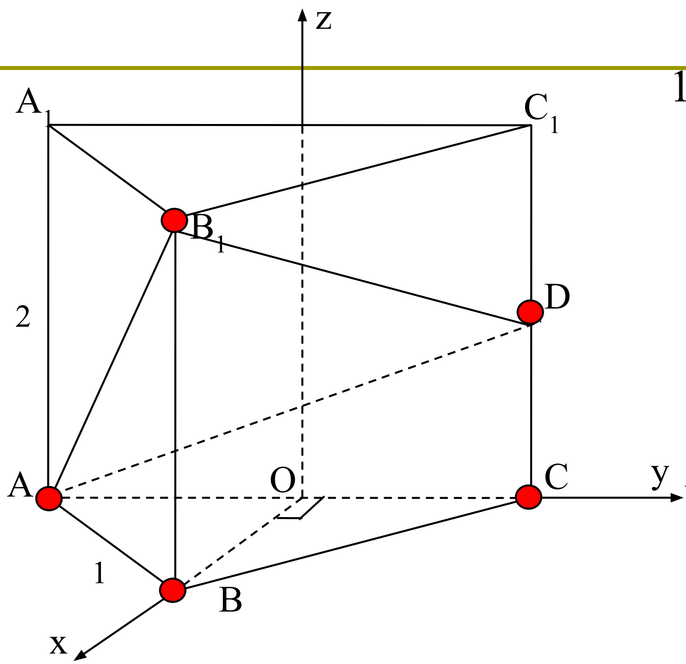
4. $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

$$\cos(\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BE}) = \frac{|3\cdot3+3\cdot0+3\cdot2|}{\sqrt{9+9+9}\cdot\sqrt{9+0=4}} = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

Искомый угол равен $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

Ответ. $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

500347. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1 Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.



1. *Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.*

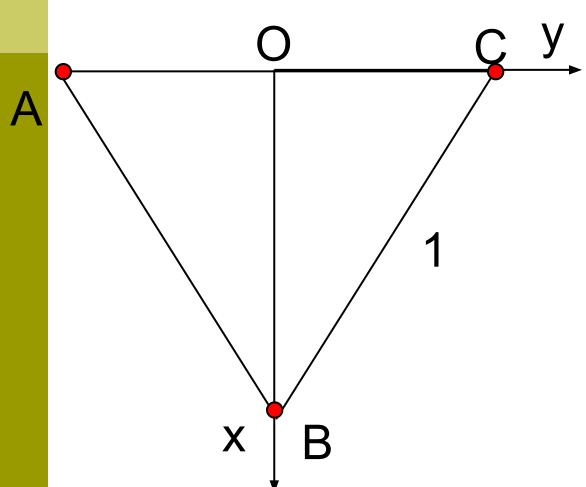
2. *Из равностороннего треугольника ABC имеем: т.к. BO – медиана и высота, то*

$$BO=\sqrt{BC^2-OC^2},\quad BO=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0,-\frac{1}{2},0),\quad B(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0),\quad C(0,\frac{1}{2},0),\quad D(0,\frac{1}{2},1),\quad B_1(\frac{\sqrt{3}}{2},0,2).$$

3. *Нормали к плоскостям* (ABC) $z=0:\ \vec{n}_1\{0;0;1\};$

(ADB_1) $2\sqrt{3}x+2y-2z+1=0:\ \vec{n}_2\{2\sqrt{3};2;-2\};$



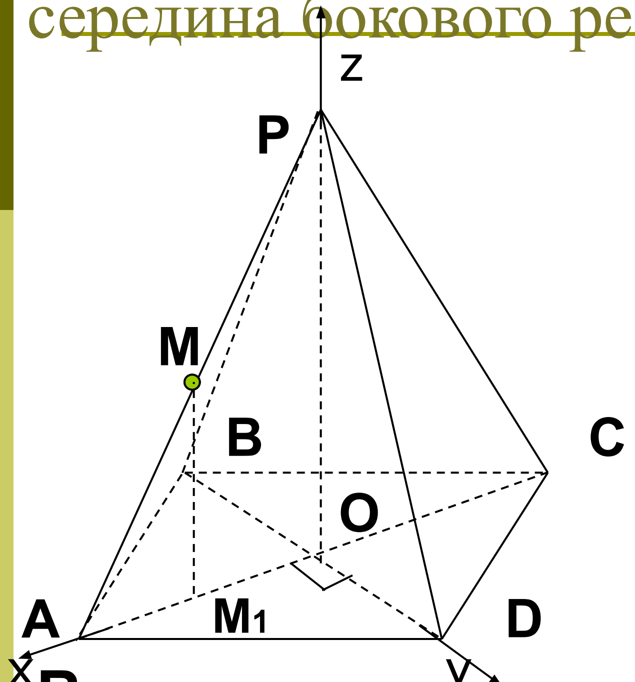
4. $$\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

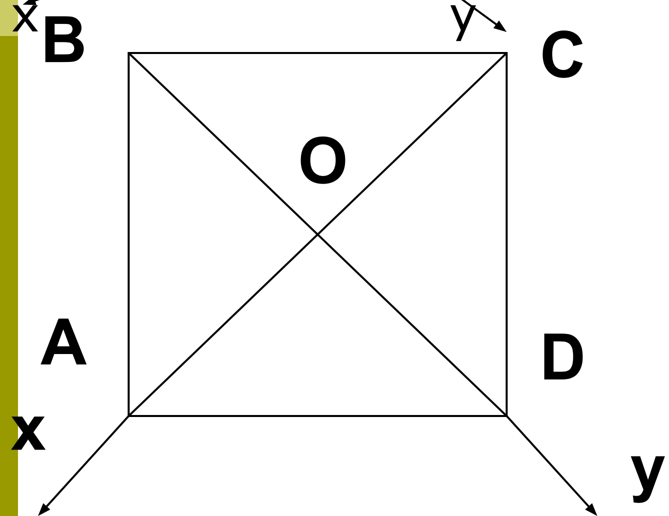
$$\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|0\cdot 2\sqrt{3}+0\cdot 2-1\cdot 2|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$

484568. Длины ребер правильной четырехугольной пирамиды PABCD с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M – середина бокового ребра пирамиды AP.





1. *Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O – точке пересечения диагоналей квадрата, как показано на рисунке. Пусть* $AB = 1$.

2. *Из* ΔABC *имеем*: $\angle B = 90^\circ$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$, $AC = \sqrt{2}$, $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Из ΔAPO *имеем*: $\angle O = 90^\circ$, $PO = \sqrt{AP^2 - AO^2}$, $PO = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Из подобия треугольников AMM_1 *и* APO *имеем*: $PO = 2MM_1$, $MM_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$$B\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right),\ M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ D\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right),\ P\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. $\overrightarrow{BM}\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right\}$ – *направляющий вектор прямой* BM.

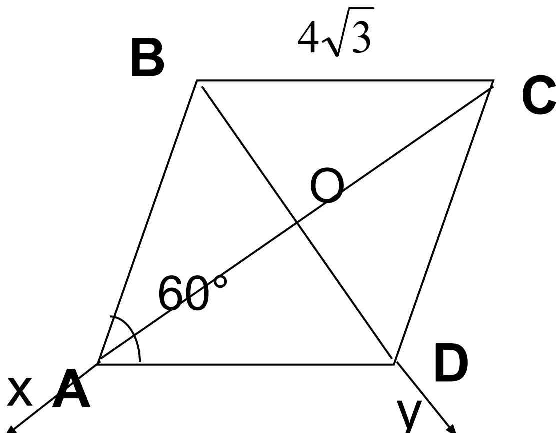
Составим уравнение плоскости (BDP): $x = 0$, $\vec{n}\{1;0;0\}$.

4. $$\sin\left(\overrightarrow{BM}, \vec{n}\right) = \frac{a_1A + a_2B + a_3C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\sin\left(\overrightarrow{BM}, \vec{n}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

500001. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ со стороной $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найти расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если боковое ребро параллелепипеда равно 8.



1. Как введем прямоугольную систему координат?

Т.к. диагонали ромба перпендикулярны, то начало координат можно взять в точке их пересечения.

2. Координаты каких точек надо найти?

A, C_1, D_1 и основания перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую C_1D_1 – точки $К_1$.

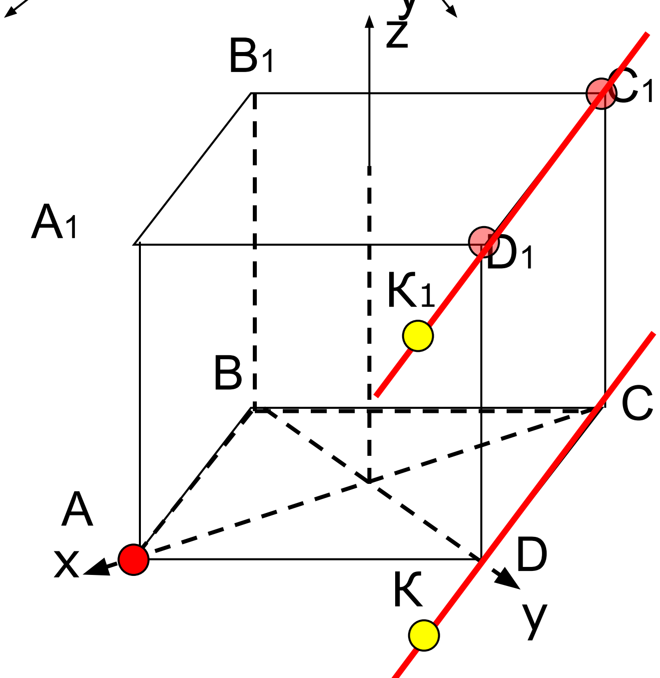
Где лежит проекция точки $К_1$? На прямой CD.

Пусть $К_1(x_0,y_0,z_0)$, ее проекция $К(x_0,y_0,0)$

$$Из\ \ \Delta ABD:\ \ AB = AD = BD = 4\sqrt{3},\ \ DO = 2\sqrt{3}.$$

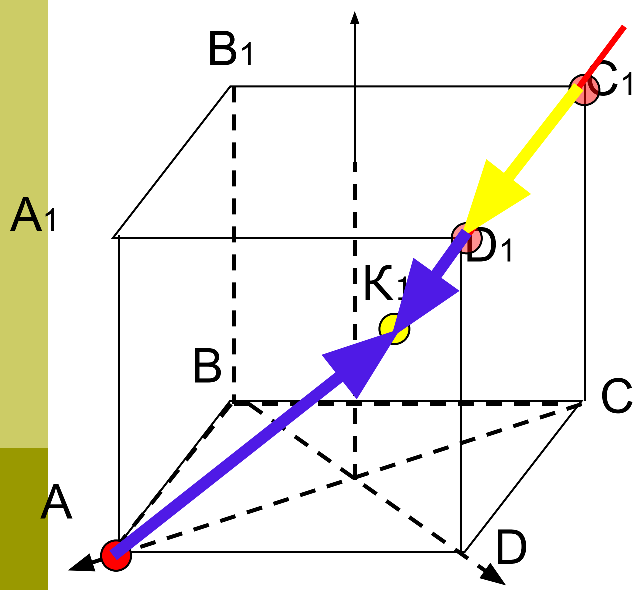
$$Из\ \ \Delta AOD:\ \ AO = 6$$

$$A(6,0,0),\ \ C_1(-6,0,8),\ \ D_1\left(0,2\sqrt{3},8\right)$$



500001. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD, со стороной $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найти расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если боковое ребро параллелепипеда равно 8.

$$A(6,0,0),\ C_1(-6,0,8),\ D_1(0,2\sqrt{3},8),\ K_1(x_0,y_0,8)$$



Найдем остальные координаты точки K_1.

$a)$ *Т.к.* $K_1 \in C_1D_1$, *то* $\overrightarrow{C_1D_1} \parallel \overrightarrow{D_1K_1}$.

Но координаты коллинеарных векторов пропорциональны $\overrightarrow{C_1D_1}\{6,\ 2\sqrt{3},\ 0\},\ \overrightarrow{D_1K_1}\{x_0, y_0-2\sqrt{3}, 0\}$

$$\frac{x_0}{6}=\lambda,\quad \frac{y_0-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\lambda,$$

$$x_0=6\lambda,\quad y_0=2\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{AK_1}\{6\lambda-6,\ 2\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3},\ 8\}$$

$б)$ *Т.к.* $\overrightarrow{C_1D_1} \perp \overrightarrow{AK_1}$, *то* $\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\overrightarrow{AK_1}=0$

$$6\cdot(6\lambda-6)+2\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3}\right)+8\cdot 0=0,\quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

$$3.\quad \left|\overrightarrow{AK_1}\right|=\sqrt{\left(6\cdot\frac{1}{2}-6\right)^2+\left(2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)^2+8^2}=10$$

Ответ: 10

Домашнее задание: решите задачи по выбору

1. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4, 4. Найти расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки *B* до точек E_1, D_1.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M=2MD_1$. Найти расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML=2LK$.

№ 484559, 484569, 485992, 485997, 500007, 500193, 500367 на сайте http://reshuege.ru

При разработке презентации были использованы тексты задач

1. http://reshuege.ru – образовательный портал для подготовки к экзаменам.
2. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

Литература

Потоскуев Е.В. Геометрия 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубленным и профильным изучением математики/ Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа. 2007. – 223, [1]с.: ил.