

Решение задач из КНИГИ

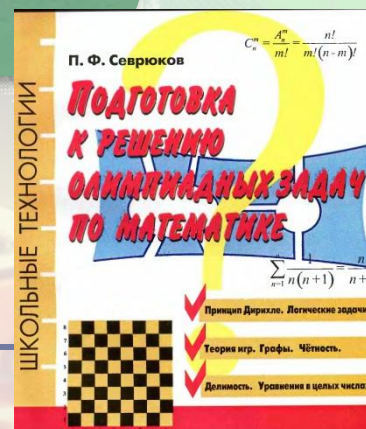
ЕГЭ 2012 Математика

И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко

Задача В10

Теория вероятностей

•и ряд примеров из



Кубики



Разное



Монеты



Это надо знать...



Вася!



- Шаг 1
 - При бросании кубика количество «исходов» - 6
- Шаг 2
 - При бросании двух кубиков количество «исходов» - $6 \cdot 6 = 36$
- Шаг 3
 - Ниже приведена таблица исходов для двух кубиков

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



T2.1. В случайном эксперименте игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число, меньшее чем 4.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 1,2,3
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 6
- Шаг 3
 - Итого, $3/6=0,5$



Делим количество «хороших» исходов на общее количество исходов.



T2.2. В случайном эксперименте игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет четное число.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 2,4,6
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 6
- Шаг 3
 - Итого, $3/6=0,5$



Делим количество «хороших» исходов на общее количество исходов.



Т2.3. Игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число, отличающееся от числа 3 на единицу.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 2;4
- Шаг 2
 - Общее количество исходов -6
- Шаг 3
 - Итого, $2/6=1/3$



Делим количество «хороших» исходов на общее количество исходов.



T2.4. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что первый раз выпадет число 6.

- Шаг 1
 - «Хороший» исход – (нас интересует только первый кубик) – 6 (1 исход)
- Шаг 2
 - Общее количество исходов – 6
- Шаг 3
 - Итого, $1/6$



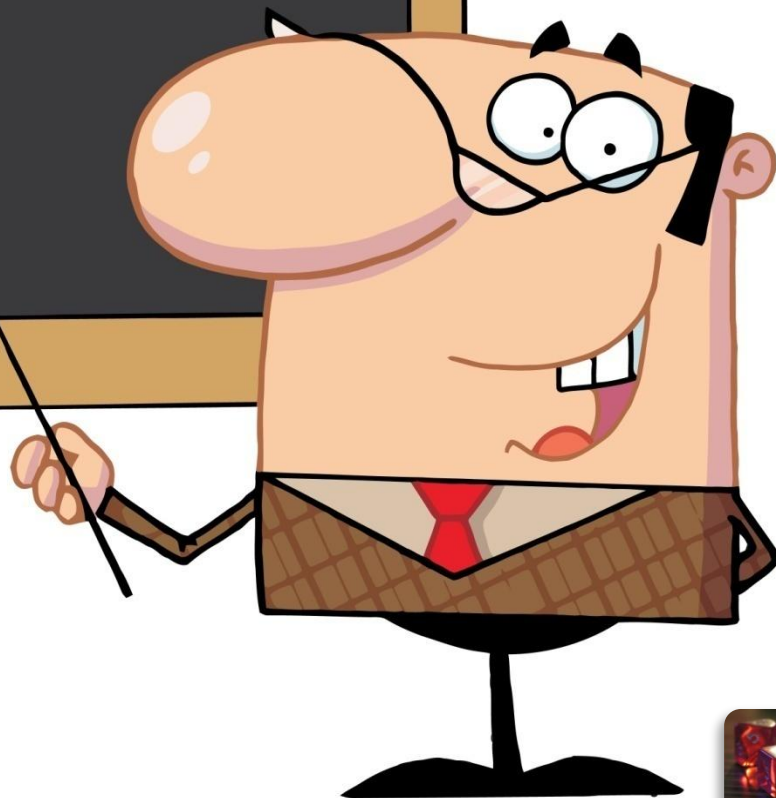
Делим количество «хороших» исходов на общее количество исходов.



T2.5. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый и во второй раз выпадет одинаковое число очков.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – $(1,1), \dots, (6,6)$ – 6 исходов
- Шаг 2
 - Общее количество исходов – 36
- Шаг 3
 - Итого $,6/36=1/6$

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



Т2.6. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию

$$A = \{\text{сумма очков равна } 5\}?$$

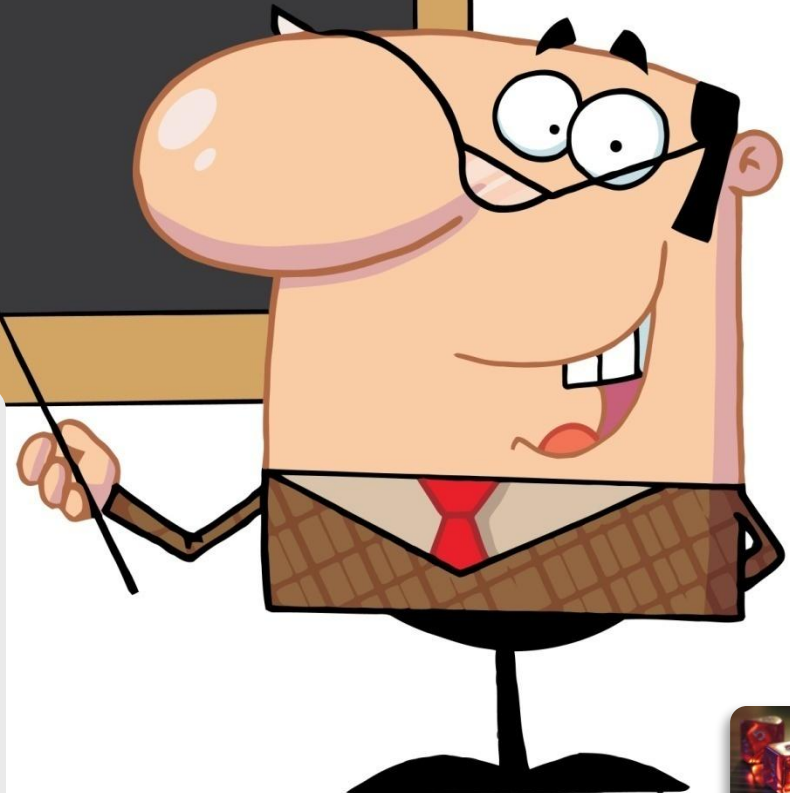
• Шаг 1

• «Хорошие» исходы – (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

• Шаг 2

• Всего – 4.

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

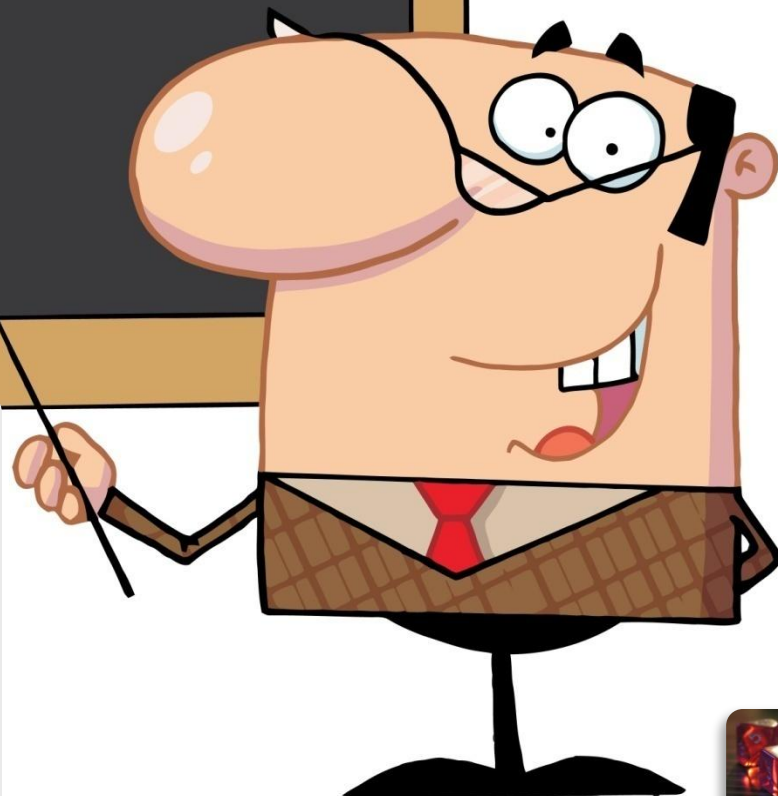


Т2.7. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность события

$$B = \{\text{сумма очков равна } 6\}.$$

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 5 (5-я «диагональ»)
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого, $5/36$

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



T2.8. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков четна.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 18
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого, $18/36=0,5$

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

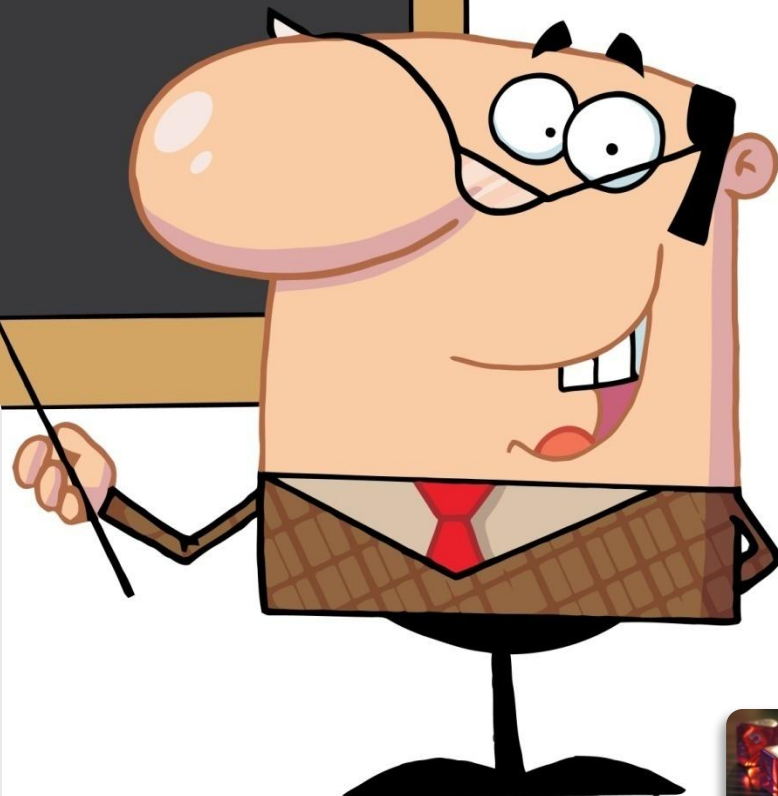


Т2.9. Игральный кубик бросают дважды. Какая сумма очков наиболее вероятна?

- Шаг 1

- Сумма 7 встречается чаще всего (6-я «диагональ»)

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



Т2.10. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпавшие числа будут отличаться на 3.

- Шаг 1
 - 1 кубик 1 2 3 4 5 6
 - 2 кубик 4 5 6 1 2 3
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого, $6/36 = 1/6$

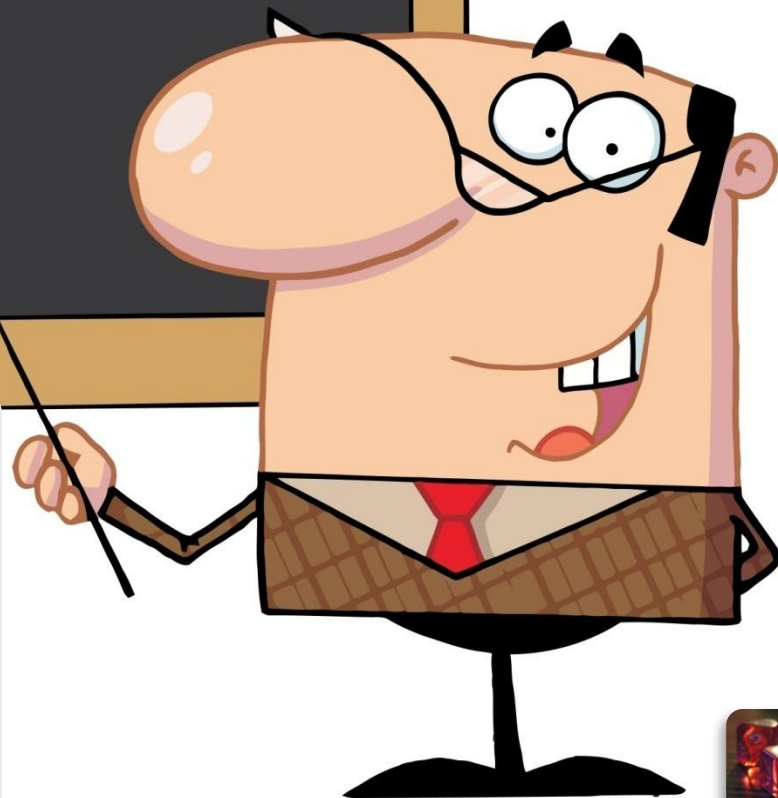
1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



T2.11. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет меньше чем 4.

- Шаг 1
 - «Хорошие» исходы – 3 (1-я и 2-я «диагональ»)
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого, $3/36 = 1/12$

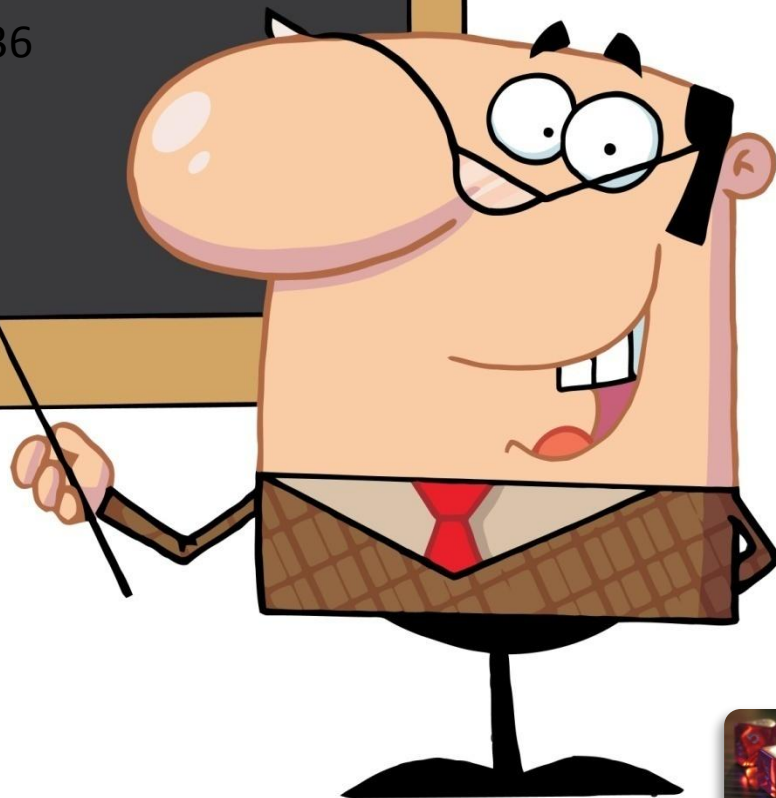
1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



T2.12. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков равно 12.

- Шаг 1
 - 1 кубик 2 3 4 6
 - 2 кубик 6 4 3 2
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого $4/36 = 1/9$

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



T2.14. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков больше или равно 10.

- Шаг 1
 - Перемножая значения в ячейках получим «хороших» исходов - 19
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 36
- Шаг 3
 - Итого, $19/36$

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6



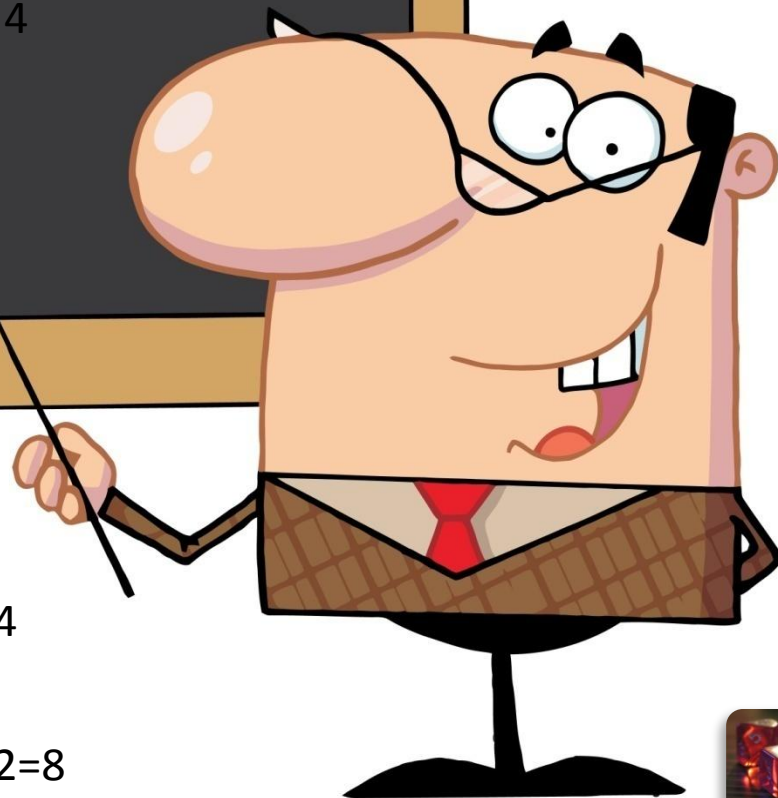
МЕНЮ



ТЗ.1. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадет орел, во второй — решка).

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов - 1
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 4
- Шаг 3
 - Итого, $\frac{1}{4}=0,25$

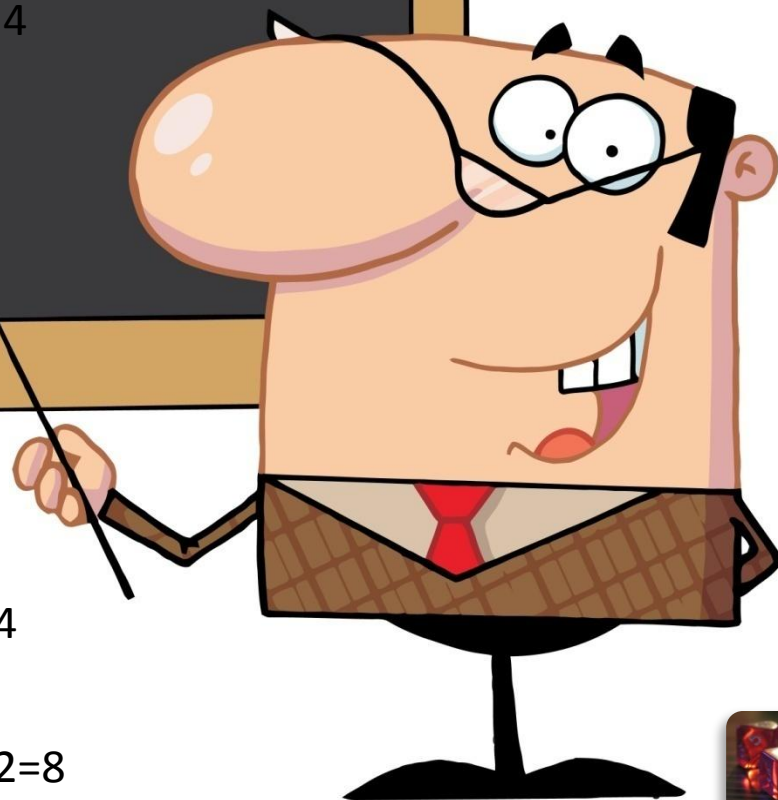
- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



Т3.2. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет ровно один орел.

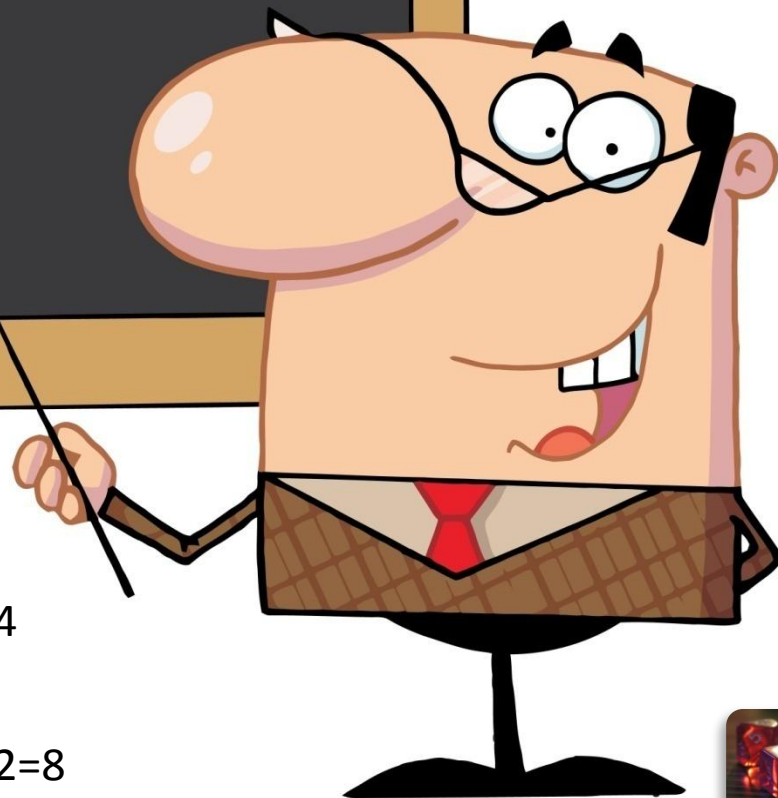
- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОР и РО
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 4
- Шаг 3
 - Итого, $2/4=0,5$

- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.3. Монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы один орел.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОР, РО, ОО
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 4
- Шаг 3
 - Итого, $3/4=0,75$

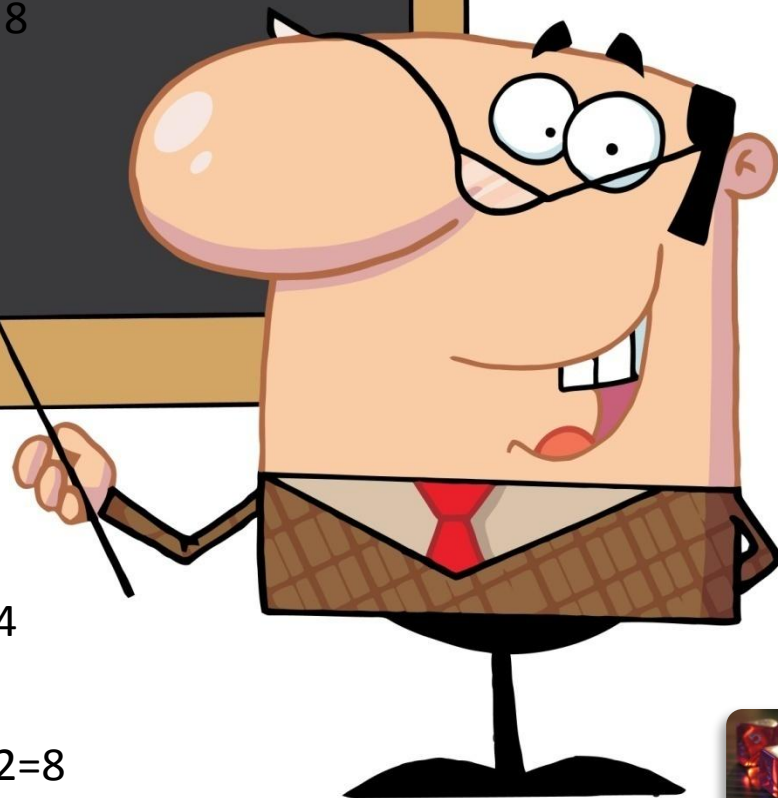


- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.4. Монету бросают три раза. Найдите вероятность элементарного исхода ОР0.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОР0
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 8
- Шаг 3
 - Итого, $1/8=0,125$



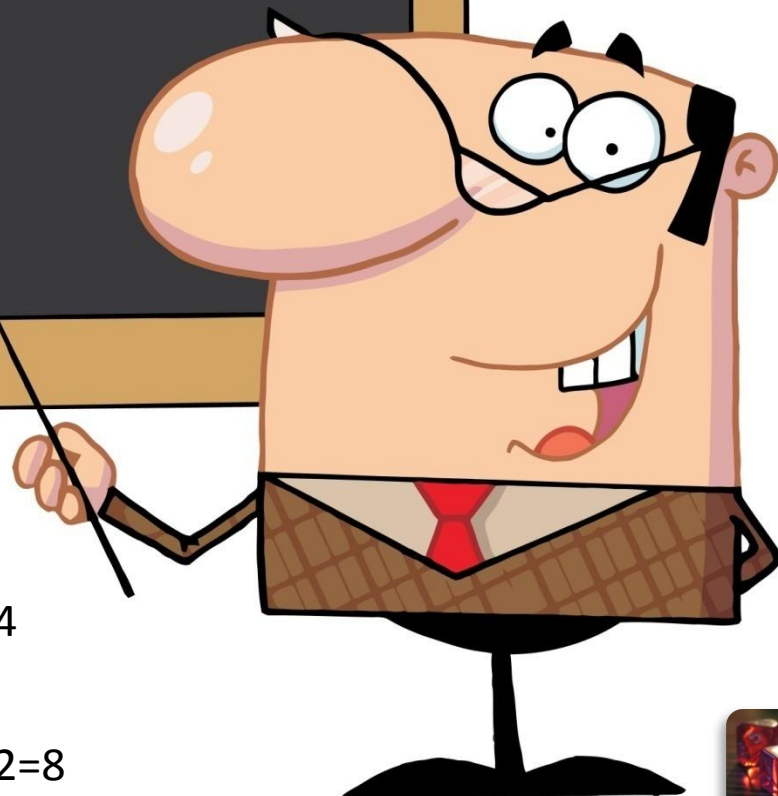
- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



Т3.5. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОРР, РОР, РРО
- Шаг 2
 - Общее количество исходов – 8
- Шаг 3
 - Итого, $3/8=0,375$

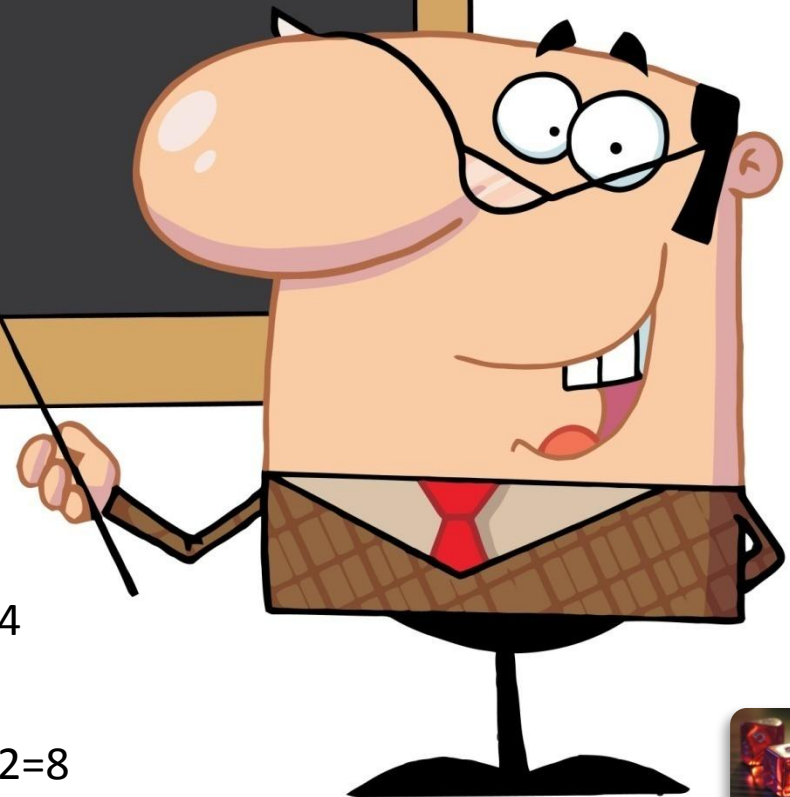
- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.6. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

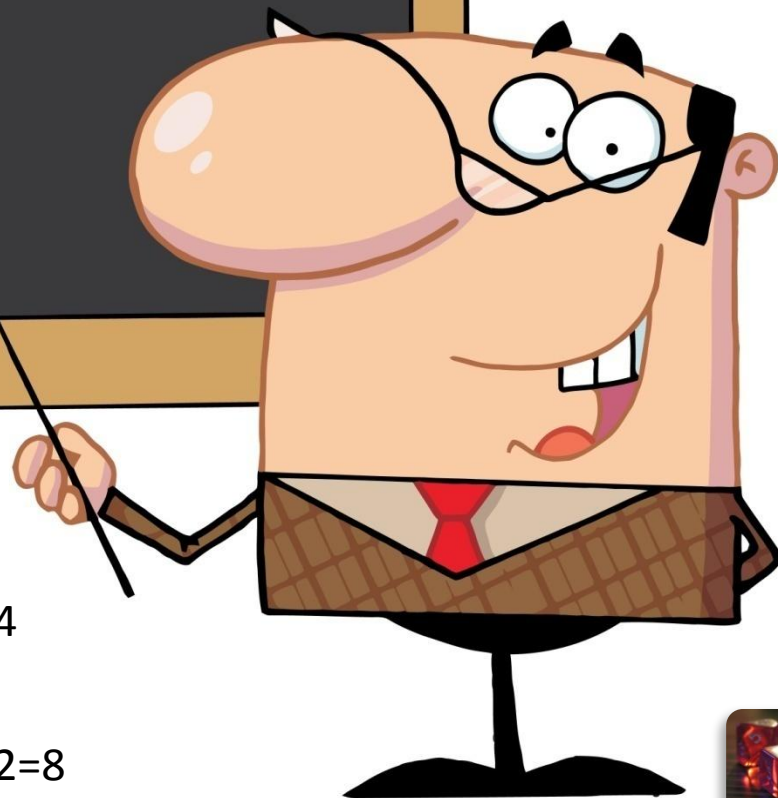
- Шаг 1
 - Задача сводится к решению более простой: если решка не выпала ни разу, значит выпали три орла - ООО
- Шаг 2
 - Количество исходов - 1
- Шаг 3
 - Итого $1/8 = 0,125$

- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.7. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет более одного раза.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ООР, ОРО, РОО, ООО
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 8
- Шаг 3
 - Итого, $4/8=0,5$



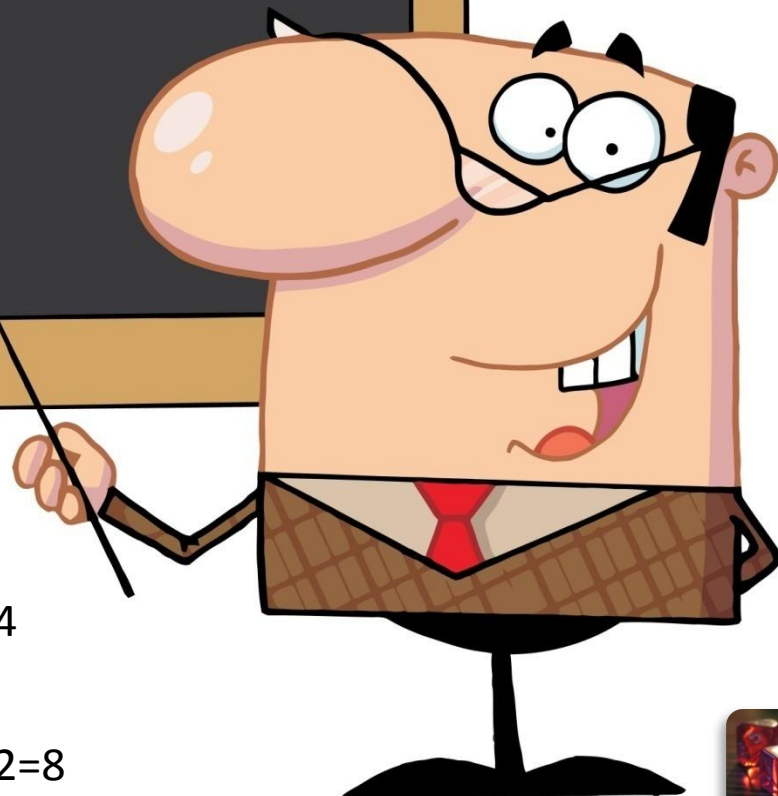
- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.8. Монету бросают три раза. Какова вероятность того, что результаты двух первых бросков будут одинаковы?

- Шаг 1
 - Важны только первые два броска. «Хороших» исходов – ОО, РР.
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 4
- Шаг 3
 - Итого $,2/4=0,5$

- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$

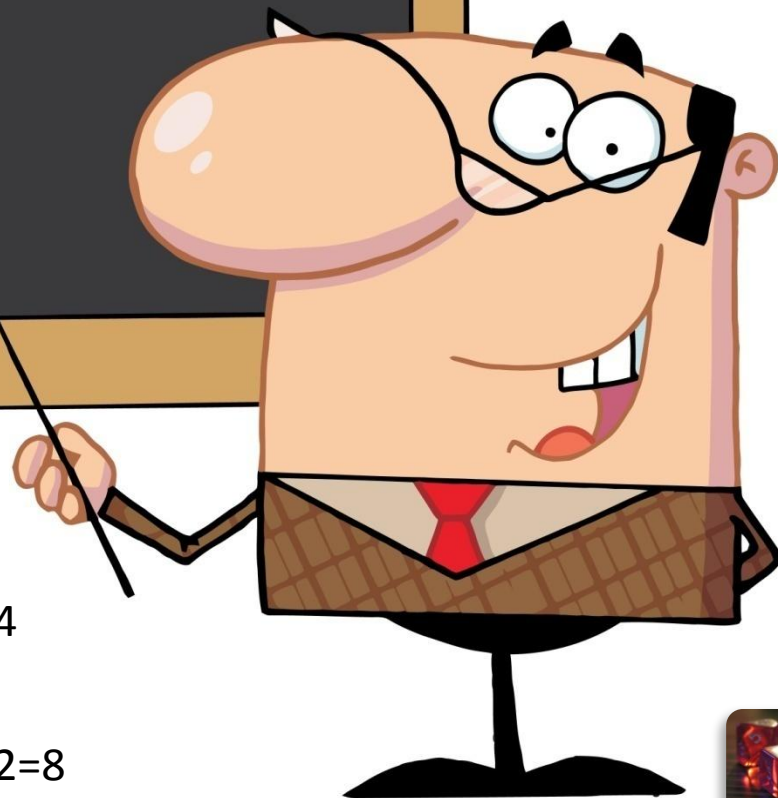


ТЗ.9. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решек выпадет больше, чем орлов.

Указание. Если орлов нет вовсе, то считать, что их количество равно нулю.

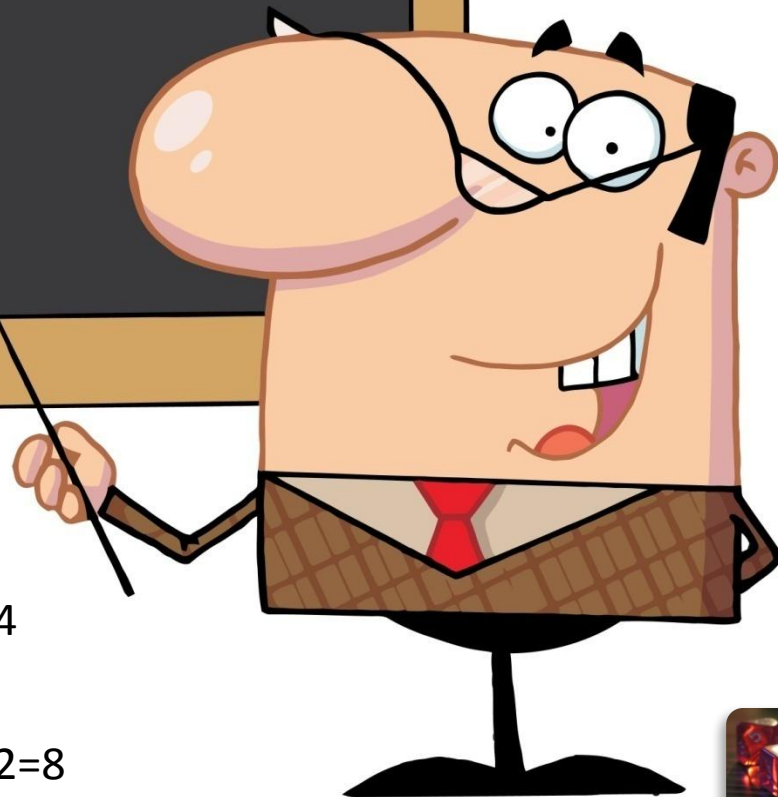
- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОРР, РРО, РОР, РРР
- Шаг 2
 - Общее количество исходов – 8
- Шаг 3
 - Итого, $4/8=0,5$

- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.10. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что результаты первого и последнего броска различны.

- Шаг 1
 - Важны только первый и последний, т.е. два броска.
«Хороших» исходов – ОР, РО.
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 4
- Шаг 3
 - Итого, $2/4=0,5$

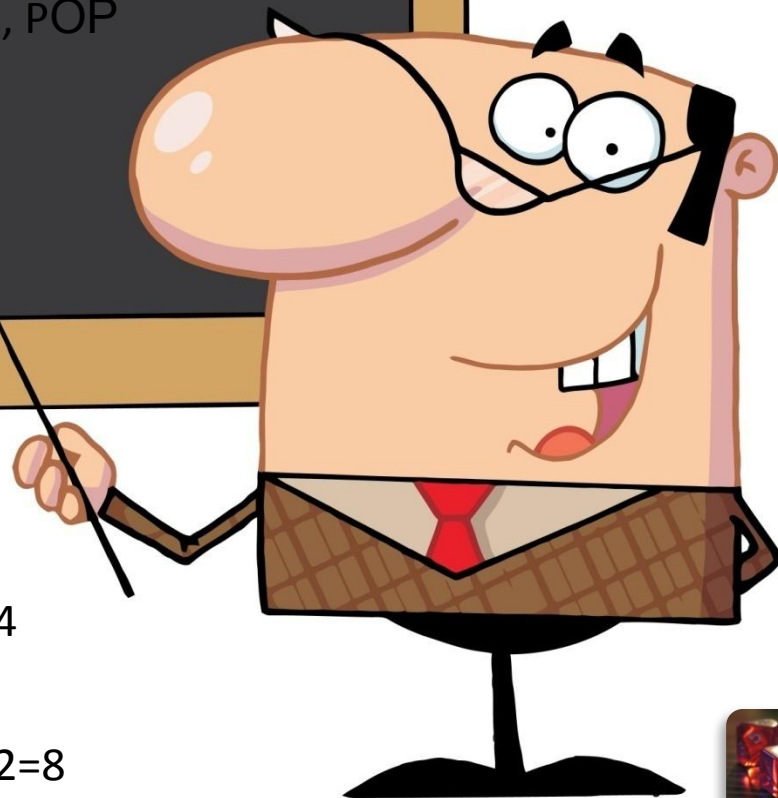


- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.11. Монету бросают три раза. Что более вероятно: выпадение одного орла или выпадение двух орлов?

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов (1) – ООР, ОРО, РОО
- Шаг 2
 - «Хороших» исходов (2) – ОРР, РРО, РОР
- Шаг 3
 - Вероятность одинакова.

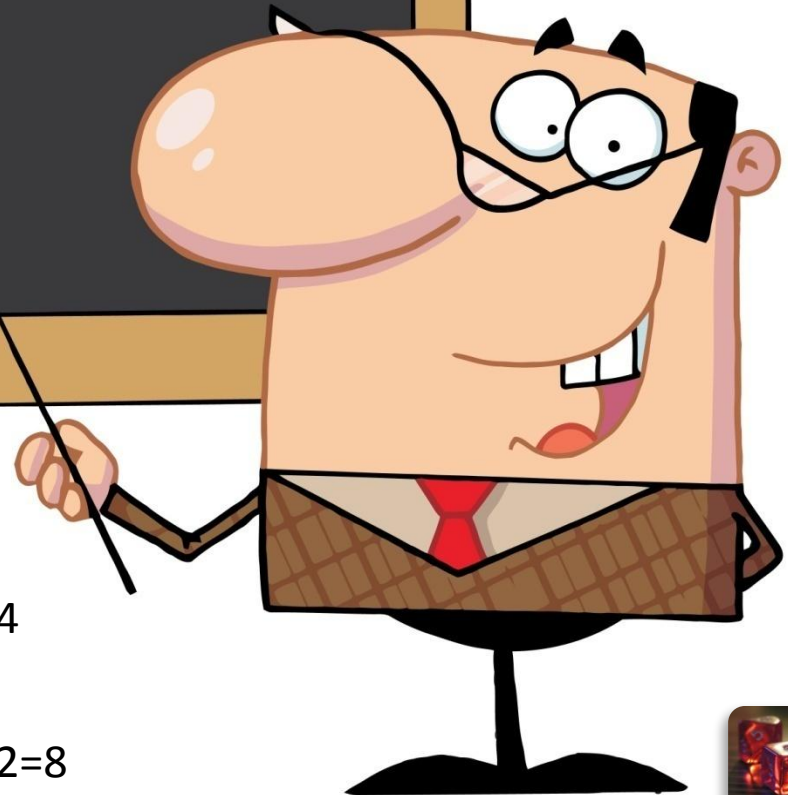


- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.12. Монету бросают четыре раза. Сколько элементарных событий в этом опыте?

- 4 броска
- Общее количество исходов – $2*2*2*2=16$

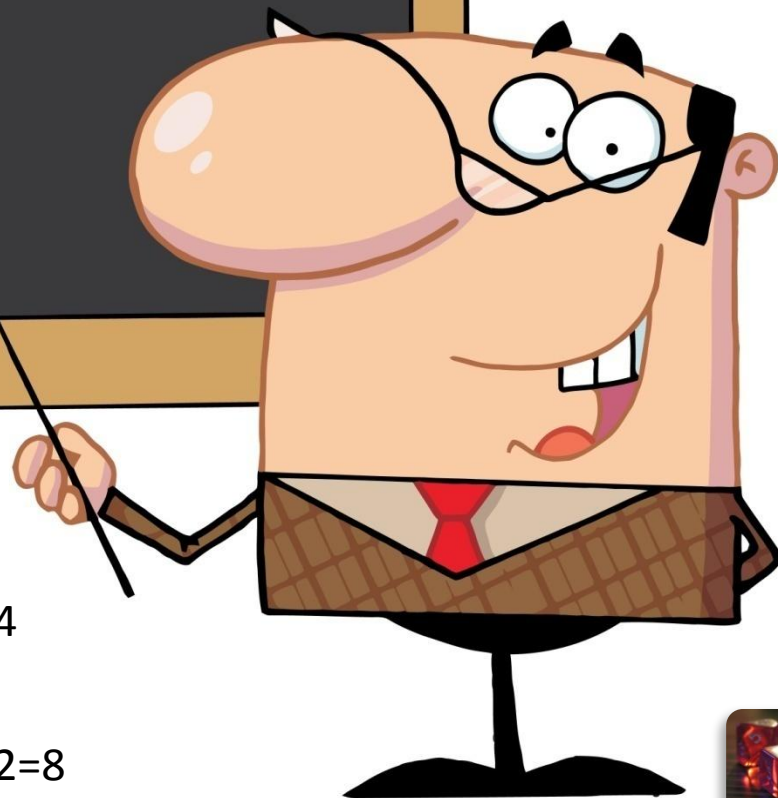


- 2 монеты
- При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
- При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



ТЗ.13. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно три раза.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – ОООР, ООРО, ОРОО, РООО
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 16
- Шаг 3
 - Итого, $4/16=0,25$



- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



Т3.14. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет больше двух раз.

- Шаг 1
 - «Хороших» исходов – OPPP, POPP, PPOP, PPPO, PPPP
- Шаг 2
 - Общее количество исходов - 16
- Шаг 3
 - Итого, $5/16=0,3125$

- 2 монеты
 - При бросании 2 монет исходов $2*2=4$
- 3 монеты
 - При бросании 3 монет исходов $2*2*2=8$



МЕНЮ



T5.12. В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе?

- $\frac{13!}{11!2!} * 2 = 12 * 13$
- Благоприятные исходы
- $\frac{26!}{24!2!} = 25 * 13$
- Шаг 2
- Всего
- Шаг 3
- Итого, $(12*13)/(25*13)=0,48$

Вероятность попадания в 1-ю группу одного из близнецов $13/26$, второго $12/25$.
 Вероятность попадания обоих $(13/26)*(12/25)=0,24$
 Групп 2, поэтому умножаем на 2.
 Итого, 0,48.



T5.13. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Тоша и Гоша. На уроке физкультуры класс случайным образом разбивают на три равные группы. Найдите вероятность того, что Тоша и Гоша попали в одну группу.

- Шаг 1
 - Благоприятные $7!/(5!*2!)*3=63$
- Шаг 2
 - Всего $21!/(19!*2!)=210$
- Шаг 3
 - Итого $63/210=0,3$



Т8.9. В магазине стоят два платежных автомата. Утром каждый из них неисправен с вероятностью 0,13, независимо от другого. Найдите вероятность того, что утром хотя бы один автомат исправен. Результат округлите до сотых.

- Шаг 1
 - Вероятность того, что оба неисправны
 $0,13 * 0,13 = 0,0169$
- Шаг 2
 - Таким образом,
- Шаг 3
 - После округления 0,98

$$1 - 0,0169 = 0,9831$$

Вероятность противоположного события
равна $1 - P(A)$



T8.12. Кубик бросают четыре раза. Какова вероятность того, что шестерка не выпадет ни разу?

- Шаг 1
 - Вероятность того, что 6 не выпадет составляет $5/6$ (для одного броска).
- Шаг 2
 - Таким образом, для четырех получим $5*5*5*5/(6*6*6*6)=625/1296$

Вероятность того, что события произойдут одновременно $P(A)*P(B)$.



Сколько 6-значных чисел кратных 5 можно получить из цифр от 1 до 6, если цифры в числе не повторяются

- Шаг 1
- Цифра 5 должна стоять на последнем месте
- Шаг 2
- Оставшиеся цифры можно расположить $5! = 120$ способами

На первом месте – любая из пяти, на втором любая из четырех и т.д.



Сколько перестановок можно сделать из слова МАТЕМАТИКА?

- Шаг 1
- Всего букв 10, буква «А» повторяется 3 раза, буквы «М» и «Т» по 2
- Шаг 2

Имеют место быть перестановки с повторениями.



В кондитерском магазине продаются пирожные 4 видов А,Б,В,Г. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

- Шаг 1
 - Зашифруем комбинацию в виде двоичного кода, например, 1101101011 - 2А2Б1В2Г
- Шаг 2
 - Т.о. $10!/(7!3!)=120$

1110001111 – 3А4Г



ЛИТЕРАТУРА

Высоцкий И. Р., Ященко И. В.

ЕГЭ 2012. Математика. Задача В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2012. — 48 с.

Севрюков, П. Ф.

Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. — Изд. 2-е. — М. : Илекса ; Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. — 112 с.



МЕНЮ



Примерный алгоритм нахождения вероятности (монеты, кубики и т.п.)

- Шаг 1
 - Ищем число «хороших» исходов
- Шаг 2
 - Ищем общее число исходов
- Шаг 3
 - Делим «первое» на «второе»



Приходим к ответу.

меню



- 1
 - Если вероятность события 0,8, то вероятность противоположного события $1 - 0,8 = 0,2$
- 2
 - Вася попадает с вероятностью 0,6
 - Вова попадает с вероятностью 0,8
 - Вероятность того, что они оба попадут $0,6 * 0,8 = 0,48$



Вероятность того, что оба промажут $(1 - 0,6) * (1 - 0,8) = 0,08$

МЕНЮ



- 1
 - Формула перестановок из n элементов
- 2
 - $P = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$



Перестановки с повторениями
 $P(2,3) = 5! / (2!3!)$ – если всего 5
элементов, один повторяется
дважды, другой трижды.

МЕНЮ

