

Решение уравнений в целых числах. Диофантовы уравнения.



ЖАНАТАЕВА АЛИНА

9 «С»

Диофантовы уравнения



- Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых чисел, вошли в историю математики как **диофантовы**.
- Диофантовы уравнения названы по имени последнего древнегреческого математика античности Диофанта Александрийского (III в.)

Биография Диофанта.



- Нам неизвестно, кем был Диофант, точные года его жизни. На могиле Диофанта есть стихотворение-загадка, решая которую нетрудно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. О времени жизни Диофанта мы можем судить по работам французского исследователя науки Поля Таннри, и это, вероятно, середина III в.н.э.
- До нас дошло 7 книг из 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, многие из которых остались нам неизвестны. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика»



«Арифметика» Диофанта – это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением и необходимым пояснением. Типично для Диофанта, что его интересуют только положительные целые и рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получились искомые положительные, рациональные решения. Поэтому, обычно, произвольное неопределенное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул "диофантово", если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах.

1.Общий вид
диафантовых
уравнений: $ax+by=c$

Решить
уравнение в
целых числах
 $x-3y=15$

2.Определим частное
решение, выразив
переменную x из
данного уравнения, а
переменную y находим,
используя метод
перебора $(x_0; y_0)$ -частное
решение.

Используя метод
перебора находим
значения $y=0$,
тогда $x+0=15$, $x=15$.
Следовательно,
 $(15;0)$ - частное
решение

3.Все остальные
решения находим
по формулам:
 $x=-bk+x_0$, $k \in \mathbb{Z}$
 $y=ak+y_0$, $k \in \mathbb{Z}$

$x=3k+15$, $k \in \mathbb{Z}$
 $y=k+0=k$, $k \in \mathbb{Z}$
ОТВЕТ:
 $(3k+15; k)$, $k \in \mathbb{Z}$

Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

- **Суть метода:** сначала первоначальное уравнение путём группировки слагаемых и вынесения общих множителей приводится к виду, когда в левой части уравнения стоит произведение сомножителей, содержащих неизвестные, а справа стоит некоторое число.
- Рассматриваются все делители числа, стоящего в правой части уравнения, затем решается система и выводится ответ.

Решить уравнение в целых числах с помощью разложения на множители.



1. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению: $x^2 - y^2 = 69$
2. Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение вида: $(x - y)(x + y) = 69$
3. Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: $69 = 1 \cdot 69$ и $69 = 3 \cdot 23$. Учитывая, что $x - y > 0$
4. Получим две системы:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases}$$
5. При решении данных систем получим: 1) $x = 35; y = 34$
2) $x = 13, y = 10$
6. Ответ: $(35; 34), (13; 10)$

Использование свойств простых чисел



Решить в натуральных целых числах : $19x+89y=1989$

1. $19x+89y=1989$

$$19x-1900=89-89y$$

$$19(x-100)=89(1-y)$$

2. $(19;89)$ взаимно-простые, то равенство
 $19(x-100)=89(1-y)$ возможно в 3 случаях

3.

$$\text{a) } \begin{cases} x-100=89 \\ 1-y=19 \end{cases}$$

a) $x = \text{нет}$
решений

$$\text{b) } \begin{cases} x-100=-89 \\ 1-y=-19 \end{cases}$$

b) $x=11$
 $y=20$

$$\text{c) } \begin{cases} x-100=0 \\ 1-y=0 \end{cases}$$

c) $x=100$
 $y=1$

ОТВЕТ: $(11;20), (100;1)$

Уравнения, решаемые выражением одной переменной через другую с последующим выделением целой части

Решить уравнение в целых числах: $x^2 - xy + 5x - 9 = 0$.

$$1) \quad y = \frac{x^2 + 5x - 9}{x} = x + 5 - \frac{9}{x}, \quad y \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \quad \frac{9}{x} \in \mathbb{Z}, \text{ если } x = \pm 1, \pm 3, \pm 9.$$

3) Следовательно:

$$\text{а) } x = -1, y = 13 \quad \text{г) } x = 3, y = 5$$

$$\text{б) } x = 1, y = -3, \quad \text{д) } x = -9, y = -3$$

$$\text{в) } x = -3, y = 5 \quad \text{е) } x = 9, y = 13$$

Ответ $(-1; 13); (1; -3); (-3; 5); (3; 5); (-9; -3); (9; 13)$.

Учет четности, нечетности чисел.



Решить в целых числах уравнение: $x^3 + y^3 - 3xy = 2$

1) Если x, y нечетны $\Rightarrow$ x^3 -нечетное число
 y^3 -нечетное число
 $3xy$ -нечетное число

$\Rightarrow$ Получаем: нечет+нечет-нечет $\neq$ чет

2) Если x -четное, y -нечетное $\Rightarrow$ x^3 -четное число
 y^3 -нечетное число
 $3xy$ -четное число

$\Rightarrow$ Получаем: чет+нечет-чет $\neq$ чет

(аналогично, если x -нечетное, y -четное)

3) Если x -четное, y -четное, тогда пусть $x=2m, y=2n$

$$8m^3 + 8n^3 - 12mn = 2$$

$$4(2m^3 + 2n^3 - 3mn) = 2 : 2$$

$$2(2m^3 + 2n^3 - 3mn) = 1 : 2$$

$$2m^3 + 2n^3 - 3mn = 0,5$$

$\Rightarrow$ невозможно ни при каких целых m и n

ОТВЕТ: решений нет

Учет четности, нечетности чисел.



- Доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах: $x! + y! = 10z + 9$ ($x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x - 1) \cdot x$)
- *Решение:*
 1. Так как правая часть уравнения – нечетное число, то и левая часть должна быть нечетным числом. Поэтому или x , или y меньше 2, т.е. $=1$
 2. Пусть $x! = 1 \Rightarrow y! = 10z + 8$
 3. Правая часть последнего равенства не делится на 5 $\Rightarrow y \leq 4$, но ни одно из целых чисел, которые удовлетворяют этому неравенству, не служат решением данного уравнения.
 4. $\Rightarrow$ данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Учёт ограниченности выражений

Решить уравнение в целых числах:

$$2(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7$$

$$(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7/2$$

РЕШЕНИЕ:

1. Заметим что:

$$1) x^4 - 2x^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 2 \geq 2$$

$$2) y^4 - 3y^2 + 4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

2. $\Rightarrow$ Значит левая часть ≥ 7 .

3. $\Rightarrow$ уравнение равносильно системе :

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 2 = 2 \\ \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

Откуда $x = \pm 1, y = \sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Z}$ $\in$

ОТВЕТ: уравнение не имеет решений в целых числах.

Уравнения, решаемые с помощью представления левой части уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых

- Решить в целых числах уравнение:

$$90x^2 - 72xy + 20y^2 + 13 = 12(x + y)$$

Решение:

1. Представим левую часть уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых.

$$(9x^2 - 12x + 4) + (4y^2 - 12y + 9) + (81x^2 - 72xy + 16y^2) = 0$$

$$(3x - 2)^2 + (2y - 3)^2 + (9x - 4y)^2 = 0$$

2. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2 = 0, \\ 2y - 3 = 0, \\ 9x - 4y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

3. Т.к. x и y не принадлежат $\mathbb{Z} \Rightarrow$ уравнение не имеет решений в целых числах.

4. Ответ: нет решений

Учет свойств делимости.



Решить в целых числах уравнение $x^3 - 100 = 225y$

РЕШЕНИЕ:

1. Очевидно, что x^3 должен быть кратен 5
2. Пусть $x = 5z$, $z \in \mathbb{Z}$, тогда $125z^3 - 100 = 225y$
 $\Rightarrow 5z^3 - 4 = 9y$
3. Очевидно, что левая часть уравнения должна быть кратна 9, т.е

a) $z = 3t$

$$5(3t)^3 - 4 = 9y$$

$$135t^3 - 4 = 9y$$

b) $z = 3t + 1$

$$5(3t + 1)^3 - 4 = 9y$$

$$5(27t^3 + 27t^2 + 9t + 1) - 4 = 9y$$

$$135t^3 + 135t^2 + 45t + 1 = 9y$$

c) $z = 3t - 1, x = 5z \Rightarrow$

$$5(3t - 1)^3 - 4 = 9y$$

$$5(27t^3 - 27t^2 + 9t - 1) - 4 = 9y$$

$$135t^3 - 135t^2 + 45t - 9 = 9y$$

с) кратно 9

$$\Rightarrow x = 15t - 5,$$

$$y = 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1$$

a) Не кратно 9 б) не кратно 9

ОТВЕТ: $(15t - 5; 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1), t \in \mathbb{Z}$

Решить уравнение в целых числах: $7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $x+y=p$, $x-y=q$. $\Rightarrow$, $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$
 $7p = 3 \frac{(p+q)^2}{4} - \frac{(p+q)(p-q)}{4} - \frac{(p-q)^2}{4}$ $7p =$
 2. Подставим в исходное уравнение:
 $28p = 3(p^2 + 3q^2)$
 3. Т.к. $28p = 3(p^2 + 3q^2)$, то p — неотрицательное и p кратно 3, т.е. $p = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
 4. Пусть $p = 3k$, тогда получим
 $+3q^2$; $28 \cdot 3k = 3((3k)^2 + 3q^2)$
 $28k = 3(3k^2 + q^2).$
 5. Отсюда следует, что k кратно 3 $\Rightarrow k = 3m$, $m \in \mathbb{Z}$;
 6. Пусть $k = 3m$, получим $28 \cdot 3m = 3(3(3m)^2 + q^2)$;
 $28m = 27m^2 + q^2$;
 $m(28 - 27m) = q^2$;
- так как $q^2 \geq 0$, то $m = 0$, или $m = 1$ (решаем неравенство $m(28 - 27m) \geq 0$ с помощью метода интервалов)
7. а) При $m = 0$, $k = 0$ (т.к. $k = 3m$), $p = 0$ (т.к. $p = 3k$), $q = 0$ (т.к. $28p = 3(p^2 + 3q^2)$),
 $\Rightarrow x = 0$, $y = 0$ (т.к. $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$)
б) При $m = 1$, $k = 3$, $p = 9$, $q^2 = 1$ (т.к. $m(28 - 27m) = q^2$) $\Rightarrow$
1) При $q = 1$, получаем $x = 5$; $y = 4$;
2) При $q = -1$, получаем $x = 4$; $y = 5$;
- ОТВЕТ: $(5; 4); (4; 5); (0; 0)$



Спасибо за внимание!