Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль, методом интервалов

Определение модуля

Модулем действительного числа а (|a|) называется:

само это число, если а – положительное число;
нуль, если число а – нуль;
число, противоположное а , если число а – отрицательное.

Или

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a>0 \\ 0, \text{ если } a=0 \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases}$$

№ 1. Решить уравнение:

$|x+2| = |x-1| + x-3$

Решение:

$$|x+2| = |x-1| + x-3$$

2 1

$=0$ при $x=-2$

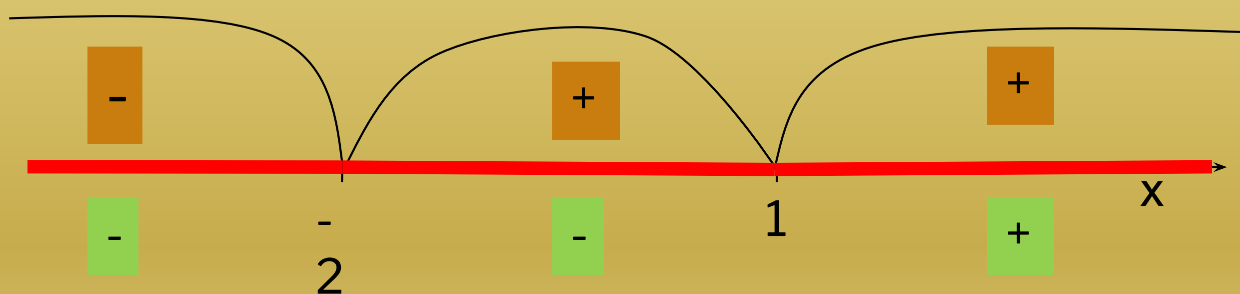
2

$=0$ при $x=1$

Решение:

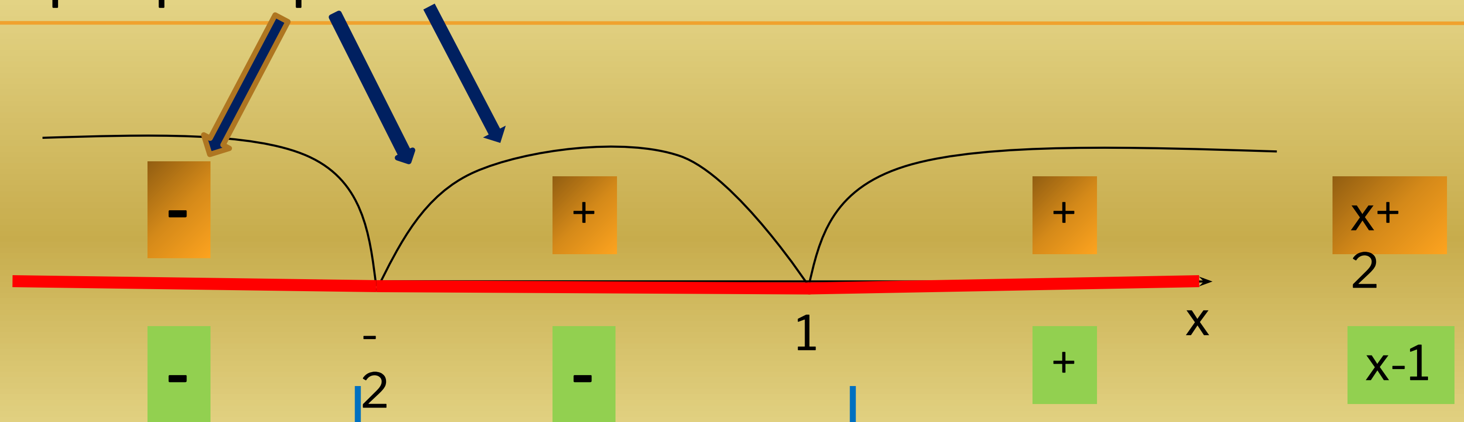
$$|x+2| = |x-1| + x-3$$

$x+2$ $x-1$



Решение:

$|x+2| = |x-1|+x-3$



Если $x<-2$, то

$-(x+2) = -(x-1) + x-3$

$-x-2=-x+1+x-3$

$x=2$ – ***не удовлетворяет условию $x<-2$***

решений нет

Если $-2\le x<1$, то

$x+2 = -(x-1)+x-3$

$x+2=-x+1+x-3$

$x=-4$ – ***не удовлетворяет условию $-2<x<1$***

Если $x\ge 1$, то

$x+2=x-1+x-3$

$x=6$

решений нет

решений нет

x=6

Ответ: x=6

№2. Решить неравенство:

$|x-1| + |x-3| > 4$

Решение:

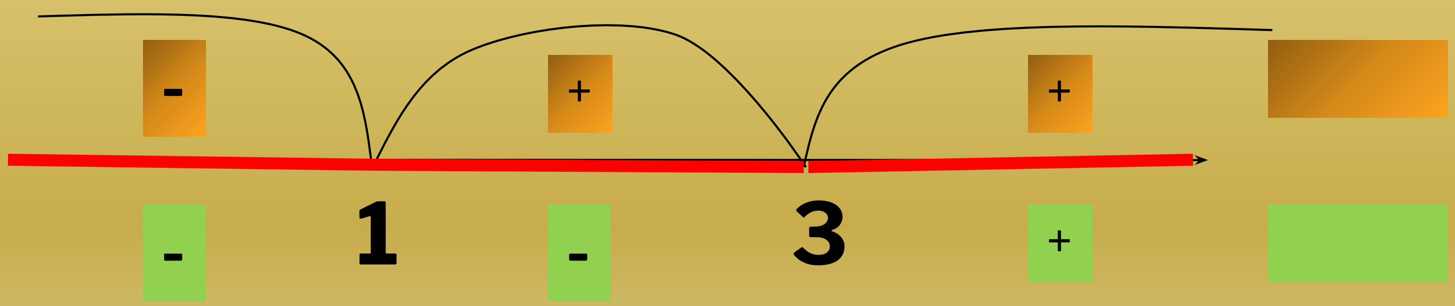
$|x-1| + |x-3| > 4$

= 0 при x=1

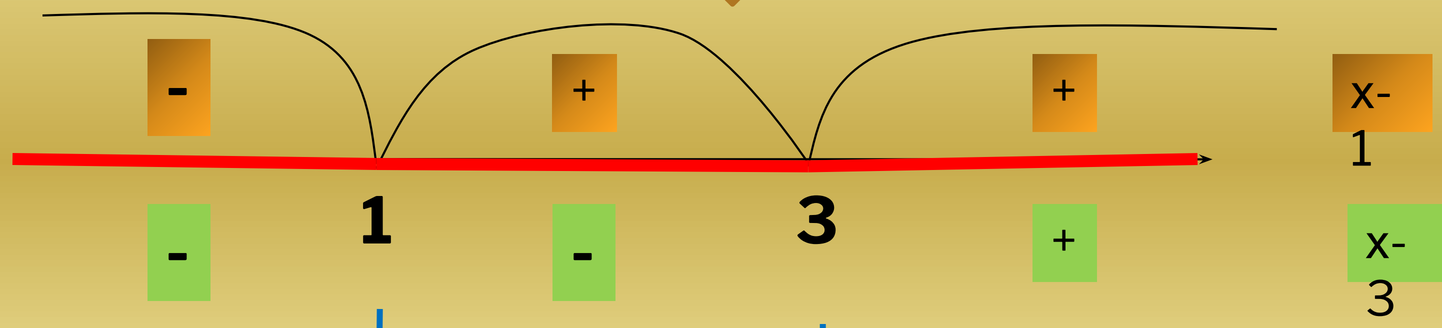
=0 при 3
x=3

Решение:

$$|x-1| + |x-3| > 4$$



Решение: $|x-1| + |x-3| > 4$



Если $x<1$, то

$-(x-1) - (x-3) > 4$
$-x+1 - x+3 > 4$
$-2x>0$
<u>$x<0$</u>

Если $1 \le x<3$, то

$x-1-(x-3) > 4$
$x-1-x+3>4$
$2>4$ – *не верно*

<u>решений нет</u>

Если $x \ge 3$, то

$x-1+x-3>4$
$2x>8$
<u>$x>4$</u>

Ответ: $x \in (-\infty;0) \cup (4;+\infty)$

Общий алгоритм

- найти нули подмодульных выражений и отметить их на числовой прямой
- определить знаки подмодульных выражений на полученных промежутках
- на каждом промежутке решить уравнение (неравенство)
- объединить полученные решения

Большое количество ошибок при решении задач с модулями вызвано тем, что многие, освобождаясь от модуля, забывают учесть условия, при которых модуль был раскрыт с тем или иным знаком.

Поэтому при решении задач, в которые входят два или более модулей, рекомендуется использовать метод интервалов.

Коне
ц