Решение тригонометрических уравнений , содержащих радикалы

Курылева С.С., учитель математики МОУ «Лицей №1» г. Воркуты

Эпиграф:

Три пути ведут к знанию: путь размышления – это путь самый благородный, путь подражания – это путь самый легкий и путь опыта – это путь самый горький.

Конфуций

Задачи на урок:

- совершенствовать навыки решения тригонометрических уравнений различными способами;
- продолжить формирование умений применять различные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях;
- Развивать познавательный интерес, интеллектуальные способности.

Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a$
$a \in [-1;1]$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n. \end{array}\right.$$

$\cos x = a$
$a \in [-1;1]$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n. \end{array}\right.$$

$tgx = a$

$$x = arctgx + \pi n, n \in Z$$

$$x = \left[\begin{array}{l} arctga + 2\pi n, \\ \pi + arctga + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Частные случаи записи решения уравнения $\sin x = a$

$a = 0$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$a = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$a = -1$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Частные случаи записи решения уравнения $\cos x = a$

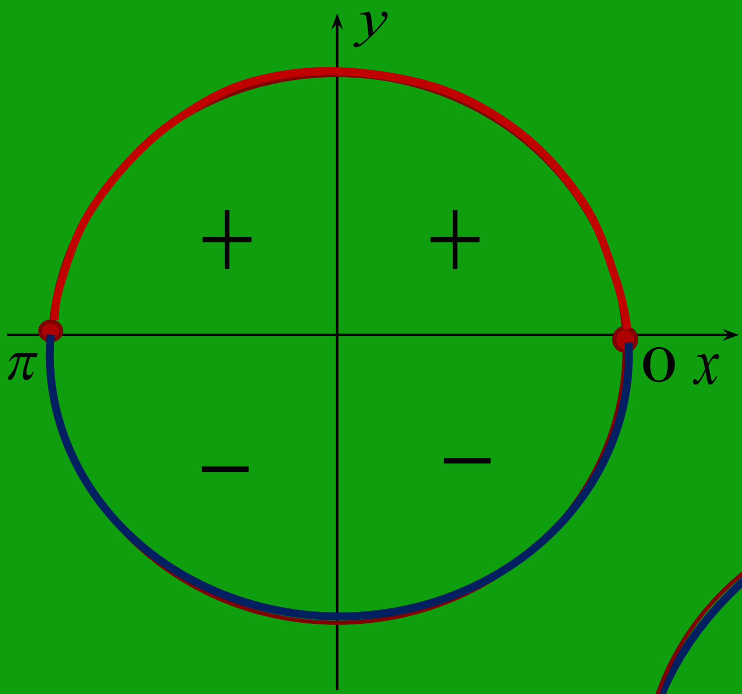
$a = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N$

$a = 1$: $x = 2\pi n, n \in N$

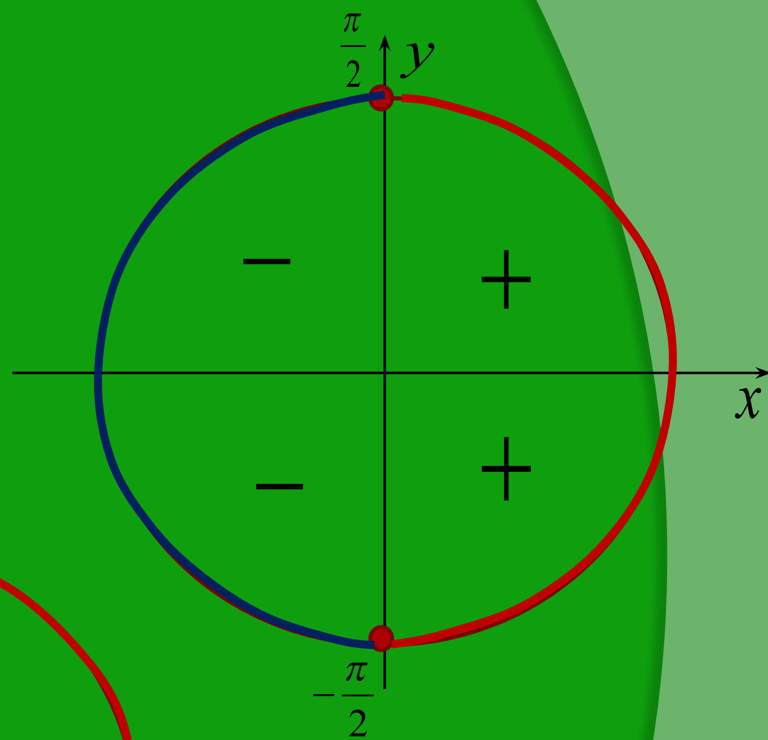
$a = -1$: $x = \pi + 2\pi n, n \in N$

Решение неравенств вида

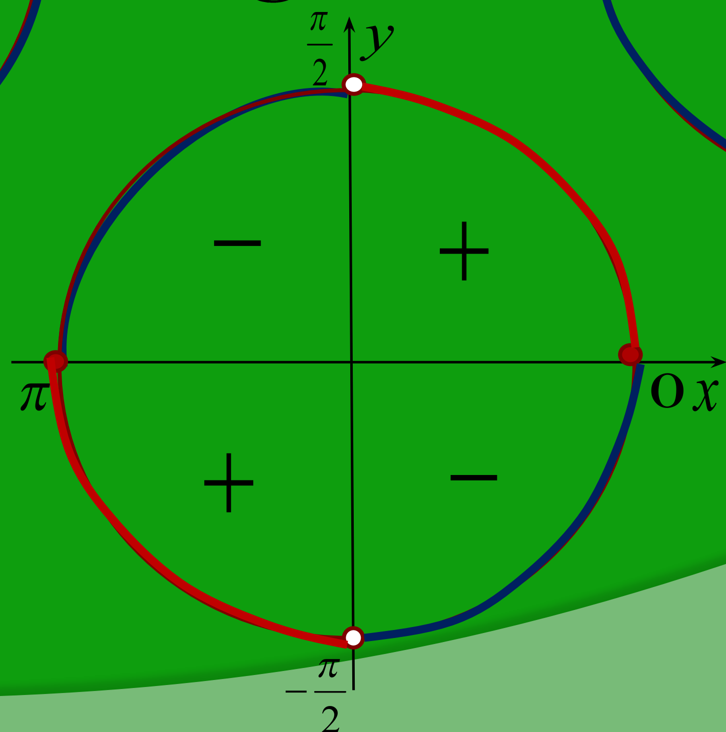
$\sin x \vee 0$



$cos x \vee 0$

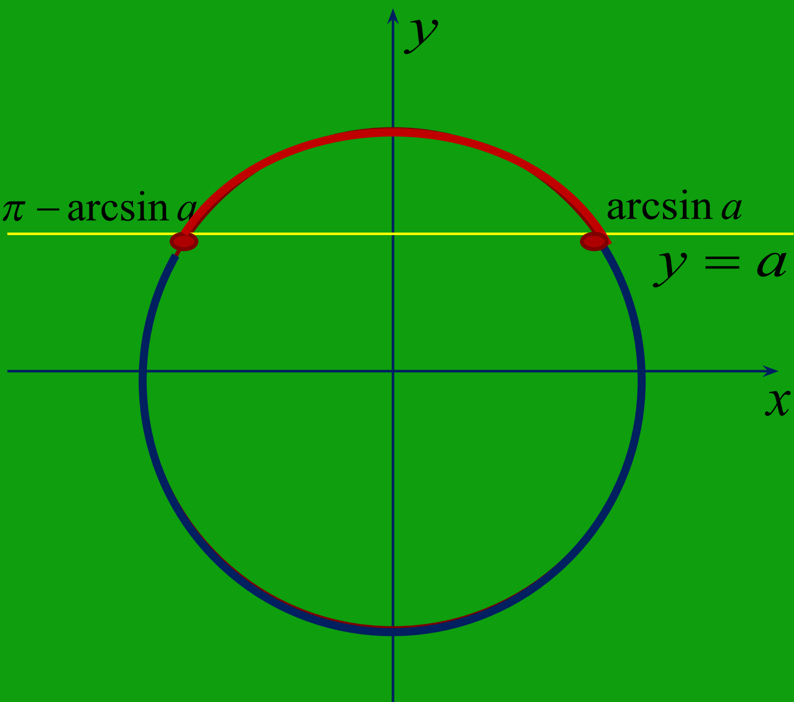


$tg x \vee 0$

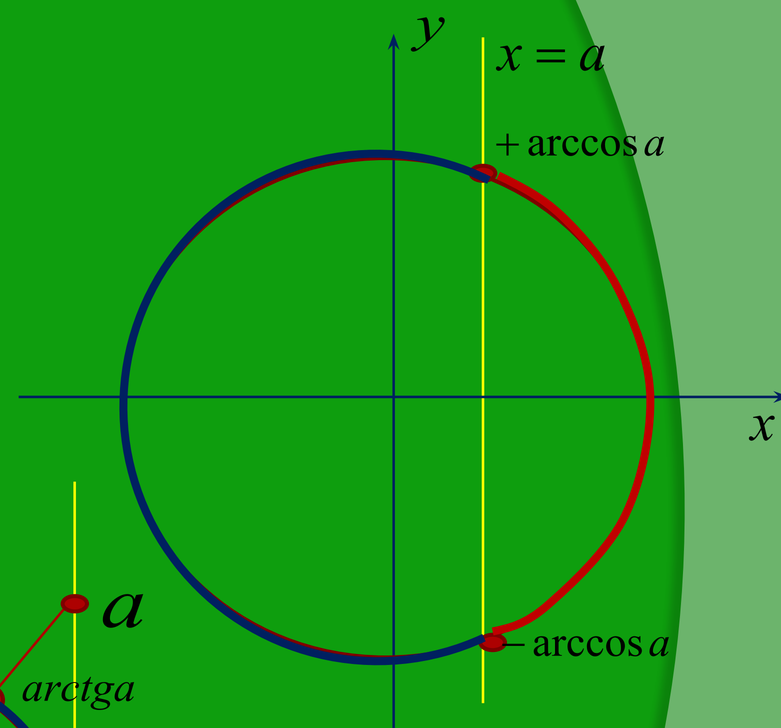


Решение неравенств вида

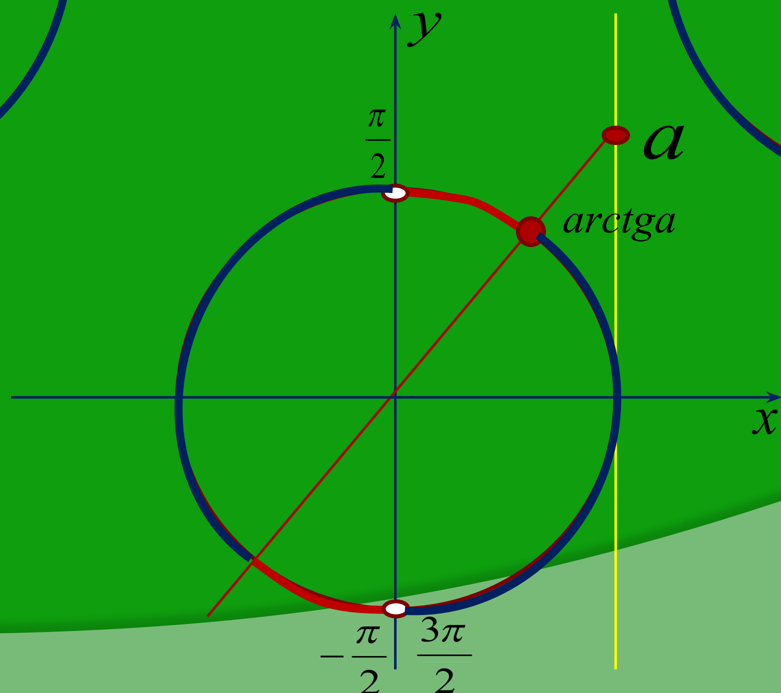
$\sin x \vee a$



$\cos x \vee a$



$tgx \vee a$



Решение некоторых иррациональных уравнений

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = \varphi^2(x) \\ \varphi(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

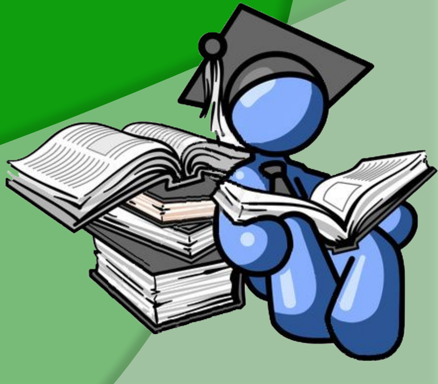
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x)\ \textit{определена} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Область определения функции $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ находим из условия $f(x) \ge 0$

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический способ

Данный способ отбора корней связан с вычислением корней при переборе значений целочисленного параметра или нахождением значений тригонометрических выражений непосредственной подстановкой при отборе корней.



Непосредственная подстановка

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезно использование формул приведения.

В частности,

$$\sin(x+\pi k)=\begin{cases}\sin x & при \quad k=2n, \\ -\sin x & при \quad k=2n+1,\end{cases} n\in Z$$

$$\cos(x+\pi k)=\begin{cases}\cos x & при \quad k=2n, \\ -\cos x & при \quad k=2n+1,\end{cases} n\in Z$$

$$tg(x+\pi k)=tgx, x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$ctg(x+\pi k)=ctgx, x\neq\pi n, n\in Z$$

Алгебраический способ

Применяется если

- заданные ограничения охватывают большой промежуток, т последовательный перебор значений параметров приводит к громоздким вычислениям;
- серии решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций;
- требуется определить количество корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Тригонометрическая окружность

Удобно использовать

- при отборе корней на промежутке длина которого не превосходит 2π;
- в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

Основные методы решения тригонометрических уравнений:

- разложение на множители;
- способ замены;
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения в тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- введение вспомогательного аргумента.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

Уравнение 1 $\sqrt{1-\cos 2x} = \sin 2x$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \ \pi n;\ n \in Z$

Уравнение 2 $\left(2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \cdot \sqrt{7x - x^2} = 0$

Ответ: $0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; 7$

Уравнение 3 $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{1 - 2\sin x}} = 0$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Проверь себя

Самостоятельная работа

I вариант

$$\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\sqrt{25-4x^2}=0$$

$$\left(6\sin^2 x-11\sin x+4\right)\sqrt{-3tgx}=0$$

II вариант

$$\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sqrt{9-4x^2}=0$$

$$\left(2\sin^2 x+5\sin x-3\right)\sqrt{-2tgx}=0$$

III вариант

$$\sqrt{2\cos x+3}=2, \qquad если \qquad tgx \,\square\, 0$$

$$\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)\sqrt{\cos x}=0$$

Проверь себя!!!

I вариант

$\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{5}{2};$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pi n, n\in Z$

II вариант

$\pm\frac{3}{2}$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pi n, n\in Z$

III вариант

$\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

$\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

Спасибо за урок!

УДАЧИ НА ЕГЭ!!!