

Гимназия №125
Советского района

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СРЕДЕ MAPLE

Выполнила:
ученица 11М класса
Владимирова О.М.

Руководители: К.Ф.-М.Н.,
доцент КГПУ, заслуженный учитель
РТ Салехова Л.Л.
учитель математики гимназии № 125
Чикрин Е. А.



Казань
2005

Содержание

- ❖ Формулировка транспортной задачи
- ❖ Математическая модель транспортной задачи
 - ❖ Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи
 - ❖ Опорное решение транспортной задачи. Циклы
- ❖ Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости
 - ❖ Переход от одного опорного решения к другому
 - ❖ Метод потенциалов
- ❖ Решение транспортной задачи методом потенциалов
 - ❖ Решение транспортной задачи в среде Maple

Формулировка транспортной задачи

a_i	b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...		...	...	...	...
a_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}



Формулировка транспортной задачи

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$



Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$



Математическая модель транспортной задачи

$a_i \quad b_j$	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$



Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$



Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи

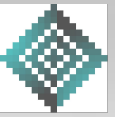
Теорема. Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запасам потребителей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

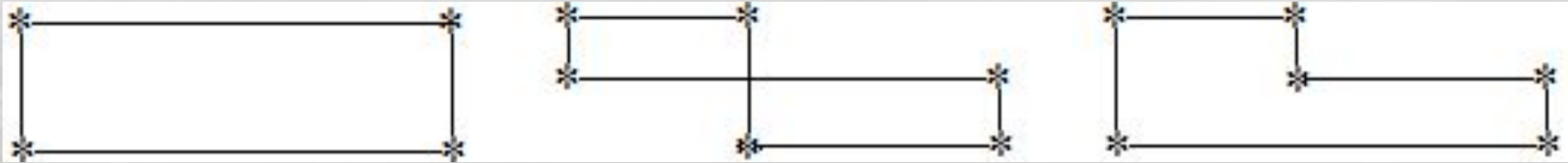
т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$.





Опорное решение транспортной задачи. Циклы



Теорема (о взаимосвязи линейной зависимости векторов-условий и возможности образования цикла). Для того, чтобы система векторов-условий транспортной задачи была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы из соответствующих клеток таблицы можно было выделить часть, которая образует цикл.

Следствие. Допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

Теорема. Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8



Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & 8 \end{pmatrix}$$

Число занятых клеток таблицы равно

$$N = m + n - 1 = 3 + 2 - 1 = 4.$$



Переход от одного опорного решения к другому

Теорема (о существовании и единственности цикла). Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Цикл называется означенным, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным знак «-».



Переход от одного опорного решения к другому



reduction

Сдвигом по циклу на

величину θ называется

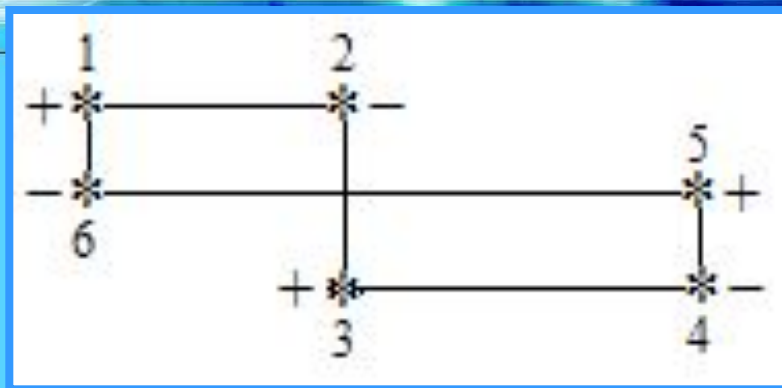
увеличение объемов перевозок

во всех нечетных клетках

цикла, отмеченных знаком «+»,

на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных

клетках, отмеченных знаком «-», на θ .



Теорема. Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min_{i,j} \{x_{ij}\}$ получится опорное решение.





Метод потенциалов

Теорема (признак оптимальности опорного решения). Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ и потребителей v_j , $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

Опорное решение является **оптимальным**, если для всех векторов-условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$a_i \quad b_j$	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8

$$\sum_{i=1}^2 a_i = 150 + 90 = 240$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 60 + 70 + 110 = 240$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & \textcircled{8} \end{pmatrix}$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	40	10	110
90	20	70	8

$$Z(X_1) = 40 \cdot 6 + 110 \cdot 4 + 20 \cdot 12 + 70 \cdot 2 = 1060$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 6 \end{matrix}$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 4 - 10 = -14$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 + 4 - 8 = 2.$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10 —	4 110
90	12 20	2 70	8 2

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 6$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

		$v_1 = 6$	$v_2 = -4$	$v_3 = 4$
	$a_i \backslash b_j$	60	70	110
$u_1 = 0$	150	40 6	10 10	110 4
$u_2 = 6$	90	20 12	70 2	2 8



Решение транспортной задачи методом потенциалов

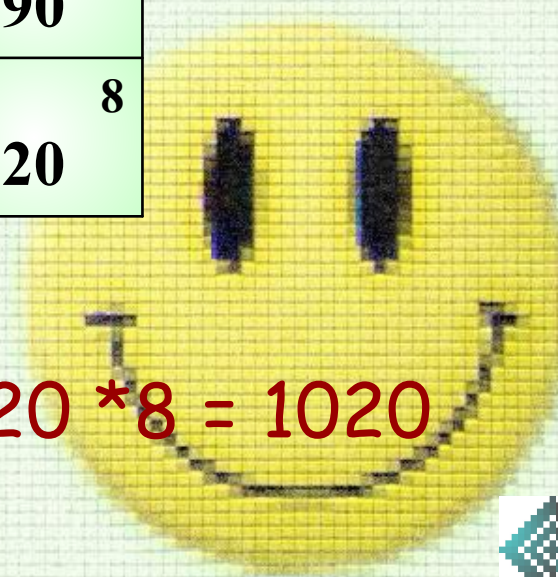
$$v_1 = 6 \quad v_2 = -2 \quad v_3 = 4$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 60	10 —	4 90
90	12 —	2 70	8 20

$$Z(X_2) = 60 * 6 + 90 * 4 + 70 * 2 + 20 * 8 = 1020$$





App7.ico

Решение транспортной задачи в среде Maple

- **standardize** – приведение заданной системы уравнений или неравенств к стандартной форме неравенств типа «меньше или равно».
- **minimize** - вычисление минимума функции;
- **simplify** (expr, n1, n2, ...) – возвращает упрощенное выражение expr с учетом параметров с именами n1, n2, ... (в том числе заданных списком или множеством);



deadsio





App7.ico

Решение транспортной задачи в среде Maple

a_i	b_j	60	70	110
150		6	10	4
90		12	2	8

Для решения транспортной задачи в программе Maple 7 имена ячеек должны быть указаны в виде x11, x12 и т.д.





AppZico

Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):standardize({x11+x12+x13=150,x
21+x22+x23=90,x11+x21=60,x12+x22=70,x13+x23=
110});
```

$\{-x_{11} - x_{21} \leq -60, -x_{11} - x_{12} - x_{13} \leq -150, x_{11} + x_{21} \leq 60, x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 150,$
 $-x_{21} - x_{22} - x_{23} \leq -90, x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 90, -x_{13} - x_{23} \leq -110, x_{13} + x_{23} \leq 110,$
 $x_{12} + x_{22} \leq 70, -x_{12} - x_{22} \leq -70\}$

Conversions → Make into List.

```
[ -x11-x21<=-60, -x11-x12-x13<=-150,
x11+x21<=60, x11+x12+x13<=150,
-x21-x22-x23<=-90, x21+x22+x23<=90,
-x13-x23<=-110, x13+x23<=110,
x12+x22<=70, -x12-x22<=-70];
```





App7.ico

Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):minimize(6*x11+10*x12+4*x13+12
*x21+2*x22+8*x23,{-x11-x21<=-60,
-x11-x12-x13<=-150,                                x11+x21<=60,
x11+x12+x13<=150,                                -x21-x22-x23<=-90,
x21+x22+x23<=90,                                -x13-x23<=-110,
x13+x23<=110,  x12+x22  <=70,  -x12-x22<=-70},
NONNEGATIVE);
{x13 = 90, x22 = 70, x23 = 20, x11 = 60, x12 = 0, x21 = 0}
```

```
simplify(6*x11+10*x12+4*x13+12*x21+2*x22+
8*x23, [x13=90, x22=70, x23=20, x11=60,
x12=0, x21=0]);
```

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	60	-	90
90	-	1020	20



OMNERA.COM

The background of the image is a deep space scene. A large, spherical planet with a heavily cratered surface, similar to Mars or the Moon, is the central focus. It is set against a dark, starry background with wispy, glowing nebulae in shades of orange and red. Several bright stars are visible, some with prominent lens flare effects. The overall color palette is dominated by dark blues, blacks, and warm oranges and yellows from the nebulae and the planet's surface.

Огромное
спасибо!!!

PLANET ARAKIS