

# Решение транспортной задачи в среде Excel

## Лекция 12

Транспортная задача относится к двухиндексным задачам, т. к. ее математическая модель сводится к минимизации целевой функции, выражающей суммарные затраты на перевозку всего груза

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

Значит, в результате решения задачи необходимо получить матрицу с компонентами  $x_{ij}$  .

# Пример. Задача организации оптимального снабжения .

Три фермерских хозяйства  $A_1, A_2, A_3$  ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек :

$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$

Стоимость перевозки 1ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в таблице

## Таблица

Фермерские хозяйства	Затраты на перевозку 1ц к торговым точкам					Запасы молока ц
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	6	8	10	12	60
$A_2$	9	5	7	4	6	60
$A_3$	6	8	4	9	7	50
Потребности в молоке, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план поставки молока в каждую торговую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

## Экономико-математическая модель задачи.

Переменные :  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$ )

- количество молока , поставляемое  $i$ -м фермерским хозяйством в  $j$ -ю торговую точку.

Целевая функция – суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать

$$\begin{aligned} F = & 7x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 12x_{15} + \\ & + 9x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + \\ & + 6x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} + 7x_{35} \rightarrow \min \end{aligned}$$

# Функциональные ограничения:

По поставщикам (их 3)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 60 - \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 50 \end{cases}$$

И по потребителям (их 5)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25. \end{array} \right.$$



Постановка этой задачи была рассмотрена выше . Теперь мы решим эту задачу средствами Excel.

**1) Указать адреса ячеек**, в которые будет помещен результат решения задачи, т. е. изменяемые ячейки . Эти ячейки можно размещать либо в первых строках массива, либо в нижних, как в нашей задаче.

**2) Ввести исходные данные** , как в транспортной таблице.



### 3) Ввести зависимости для ограничений.

Сначала введем условия реализации мощностей поставщиков, т.е. ограничения по запасам:

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,3},$$

где  $a_i$  - запас поставщика. Количество потребителей равно 5.

Поместим курсор в ячейку G11.

Выберем функцию **СУММ**.

Выделим для суммирования ячейки **B11:F11**.

Microsoft Excel - Книга1.xls							
Введите вопрос Arial Cyr 10							
G11 =СУММ(B11:F11)							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам						Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9	Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj						
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						
13	A3						
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
Лист1 / Отчет по устойчивости 2 / Лист2 / Лист4 / Лист5 / Лист3 /							
Готово NUM							
пуск Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Microsoft Excel - Кни...							

Microsoft Excel - Книга1.xls							
Введите вопрос <span>             Ввод             Вывод             Поиск             Справка           </span>							
G13     =СУММ(B13:F13) <span>             Arial Cyr    10    Ж   К   Ч                 <span>               000   000   000             </span> </span>							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам						Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9	Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj						
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							



Это мы введем левые части  
неравенств (1). Обратим внимание :  
здесь суммирование идет по строке без  
каких –либо коэффициентов.  
Теперь введем условия по  
потребителям:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,5}.$$

- Нам сейчас нужно просуммировать ячейки по потребителям. Поместим курсор в ячейку **B14**.
- Выберем функцию **сумм**.
- Выделим для суммирования ячейки **B11:B13**, где находятся запасы молока. Нажмем кнопку **ОК**.
- Эту же последовательность действий повторим для ячеек **C14, D14, E14, F14**.





4) **Ввести зависимость для целевой функции.** Целевую функцию поместим в ячейку **G14**. Сюда надо ввести формулу  $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ . Это двойная сумма, где суммируются произведения. Здесь надо учесть, что перемножаются все коэффициенты из транспортной таблицы и все соответствующие им переменные, стоящие в изменяемых клетках.

- Поместим курсор в ячейку **G14**.
- Запустим **мастер функций** .
- Выберем **СУММПРОИЗВ**.
- Нажмем **ОК**.

- В окне укажем адреса массивов .В нашей задаче это произведение затрат на доставку (ячейки **B3:F5**)и объемов поставок к каждому потребителю (ячейки **B11:F13**).
- В поле **Массив1** укажем адреса **B3:F5**, поместив курсор в указанные ячейки.
- В поле **Массив2** укажем адреса **B11:F13**, поместив курсор в эти ячейки.
- Нажмем **ОК**.В данной задаче в ячейке **G14** появится число 0.

Microsoft Excel - Книга1.xls							
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос							
G14     =СУММПРОИЗВ(B3:F5;B11:F13)							
	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14		0	0	0	0	0	0
15							
16							
17							
18							
19							
20							

На рисунке отражены введенные формулы.

Фермер. хозяйства	Количество перевезенного молока от фермерского хозяйства $A_i$ к торговой точке $B_j$					
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$						=СУММ (B11:F11)
$A_2$						=СУММ (B12:F12)
$A_3$						=СУММ (B13:F13)
	=СУММ (B11:B13)	=СУММ (C11:C13)	=СУММ (D11:D13)	=СУММ (E11:E13)	=СУММ (F11:F13)	=СУММПРО ИЗВ(B3:F5, B11:F13)

**5) Запустить команду Поиск решения.**

**6) Назначить ячейку для целевой функции.** Для этого поместить курсор в целевую ячейку. Адрес **\$G\$14** введется при этом сам.

Ввести тип целевой функции –отметить –**Минимальное значение**

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

G14 =СУММПРОИЗВ(B3:F5;B11:F13)

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас молока		
2	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)		
3	7	6	8	10	12	60		
4	9	5	7	4	6	60		
5	6	8	4	9	7	50		
6	30	20	55	20	25			
7								
8								
9	Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj							
10	B1	B2	B3	B4	B5			
11						0		
12						0		
13								
14	0	0	0					
15								
16								
17								
18								
19								
20								

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$G\$14

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: 0 ☒ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Выполнить Заккрыть Параметры Восстановить Справка

Готово

пуск Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Книга1.xls

NUM EN 21:25

## 7) Ввести ограничения

Первое ограничение –по уровню потребления:  $B14:F14=B6:F6$

второе –по уровню запасов  $G11:G13 \leq G3:G5$

После ввода ограничений нажмем кнопку **ОК**.



## 8) Ввести параметры.

Установить Неотрицательные значения  
и Линейная модель

Нажмем ОК.

В появившемся окне **Поиск решения**  
нажать **Выполнить**.



**Ответ.** Распределение товара по торговым точкам приведено на рисунке. Общие затраты на перевозку продукции составят **785** д.е. Спрос торговых точек удовлетворен полностью - они получают 150ц молока. У первого фермерского хозяйства останется нереализованным **20ц** молока.

# Пример. Закрепление самолетов за воздушными линиями.

На четырех авиалиниях используется три типа самолетов. В таблицах задано число самолетов каждого типа, месячный объем перевозок и эксплуатационные расходы.

Таблица 1

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям			
		I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50
2	20	30	25	10	17
3	30	25	50	30	45

Таблица 2

Тип самолета	Эксплуатационные расходы			
	I	II	III	IV
1	15	20	25	40
2	70	28	15	45
3	40	70	40	65
Потребности	300	200	1000	500

Требуется распределить самолеты трех типов по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000 и 500 единиц груза.

# Экономико-математическая модель задачи.

*Переменные* :  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ ) - количество самолетов  $i$ -го типа, назначаемых на  $j$ -ю авиалинию.

*Целевая функция* - суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать:

$$\begin{aligned} F(x) = & 15x_{11} + 20x_{12} + 25x_{13} + 40x_{14} + \\ & + 70x_{21} + 28x_{22} + 15x_{23} + 45x_{24} + \\ & + 40x_{31} + 70x_{32} + 40x_{33} + 65x_{34} \rightarrow \min \end{aligned}$$

## Ограничения:

По плану перевозок

$$\begin{cases} 15x_{11} + 30x_{21} + 25x_{31} \geq 300, \\ 10x_{12} + 25x_{22} + 50x_{32} \geq 200, \\ 20x_{13} + 10x_{23} + 30x_{33} \geq 1000, \\ 50x_{14} + 17x_{24} + 45x_{34} \geq 500; \end{cases}$$



# Ограничения:

Если нет необходимости использовать все самолеты, то эти ограничения будут иметь вид неравенств типа  $\leq$ .

Все переменные должны быть неотрицательными и целочисленными, т. к. число самолетов не может быть не целым.

# Вид электронной таблицы

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

F38

	A	B	C	D	E	F	G
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4	1						
5	2						
6	3						
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозок						
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	45	30	
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	28	15	45		
20	3	40	70	40	65		
21							

Готово

Отчет по устойчивости 3 Лист1 Лист5 Отчет по устойчивости 2 Лист2 Лист4 Лист3

ПУСК Мои документы Пример 2 транспорт... Microsoft PowerPoint... Microsoft Excel - Кни...

NUM

EN 9:51

# Решение задачи.

Ограничения по количеству используемых самолетов вводим с помощью функции СУММ.

Эксплуатационные расходы вводим с помощью функции СУММОИЗВ.

Ячейку ЦФ заполняем с помощью функции СУММОИЗВ.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(E4:E6:E12:E14)

	A	B	C	D	E	F	G
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозок	0	0	0	12:E14)		
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	45	30	
15							
16	Тип самолета						
17							
18							
19							
20							
21							

Аргументы функции

СУММПРОИЗВ

Массив1 E4:E6 = {0;0;0}

Массив2 E12:E14 = {50;17;45}

Массив3 = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов или диапазонов.

Массив2: массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

Справка по этой функции

Значение: 0

OK Отмена

Правка

Отчет по устойчивости 3

ПУСК

Мои документы

Пример 2 транспорт...

Microsoft PowerPoint ...

Книга1.xls

EN

10:12

Microsoft Excel - Книга1.xls							
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка							
Введите вопрос							
F6	=СУММ(B6:E6)						
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0		
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	45	30	
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	20	15	15		
20	3	70	20	15	15		

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Ф8    fx =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B18:E20)

	A	B	C	D	E	F	G
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0	0	
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	45	30	
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	28	15	45		
20	3	40	70	40	65		
21							
22							

Готово

NUM

пуск    Мои документы    Пример 2 транспорт...    Microsoft PowerPoint ...    Книга1.xls

EN 10:18



Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Ф8    =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B18:E20)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0	0	
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11							
12	1					50	
13	2					20	
14	3					30	
15							
16	Тип самолета						
17							
18	1						
19	2						

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению:

☒ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- 
- 
-

Ввод

NUM

пуск    Мои документы    Пример 2 транспорт...    Microsoft PowerPoint ...    Книга1.xls

EN    10:21



Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Ф8    =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B18:E20)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4	1	20	0	20	10	50	
5	2	0	8	0	0	8	
6	3	0	0	20	0	20	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	300	200	1000	500	2224	
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2				17	20	
14	3				45	30	
15							
16	Тип самолета	Экспертные оценки					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	20	15	15		

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

☒ Сохранить найденное решение

☐ Восстановить исходные значения

Результаты  
Устойчивость  
Пределы

OK    Отмена    Сохранить сценарий...    Справка

Готово

NUM

пуск    Мои документы    Пример 2 транспорт...    Microsoft PowerPoint ...    Книга1.xls

EN    10:22





# Ответ

Общая стоимость перевозок составит 2224 д.е. Из 20 самолетов второго типа будет использовано 8, из 30 самолетов третьего типа будет использовано 20. Месячный объем перевозок выполнен полностью. Оптимальное распределение самолетов приведено на последнем слайде.