

Решение нестандартных задач

Цифры не управляют миром, но они показывают, как управляется мир. (И. Гете)

План презентации

1. Круги Эйлера
2. Графы
3. Решение задач с конца
4. Алгоритм Евклида
5. Подбор задач для учеников

Вступление

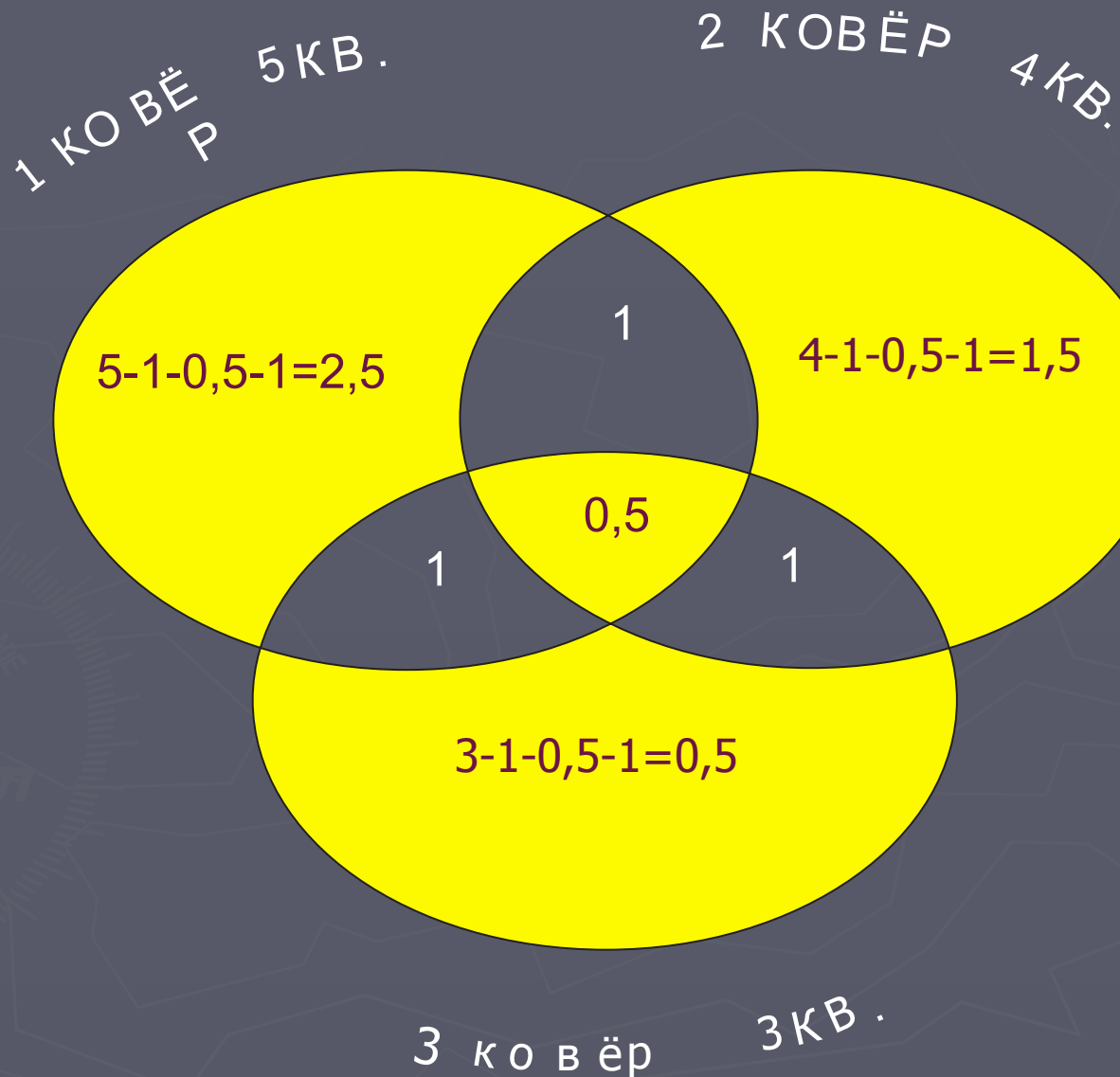
В математике часто встречаются нестандартные задачи, которые невозможно решить с помощью правил.

Многие математики не пытаются придумать для них правила, а находят способы решения. Эти решения и заинтересовали меня. Их очень много. Например: переливание, круги Эйлера, алгоритм Евклида, решение с конца, метод крайнего и т. п. Рассмотрим несколько видов.

Круги Эйлера

- *Задача: S комнаты - 12 кв. м покрыт 3 коврами: S I ковра – 5 кв. м, II – 4 кв. м, III – 3 кв. м. Каждые 2 ковра перекрываются на площади 1,5 кв. м, причём 0,5 кв. м из этих 1,5 кв. м приходится на участок пола, где перекрываются все 3 ковра.*
- *Какова площадь пола, не покрытая коврами?*

Решение задачи



2.Графы

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними, стрелками. Такой способ представления называется графом. Например, схема метро-это граф. Точки называют вершинами графа, а линии - ребрами.

Вершину называют чётной, если из неё выходит чётное число рёбер и нечётной в противном случае. Граф называют связным, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, ориентированным-если на каждом ребре указано направление, плоским-если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются.

Графы (продолжение)

При решении олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

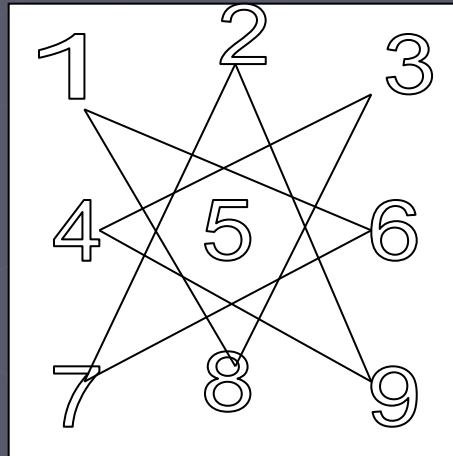
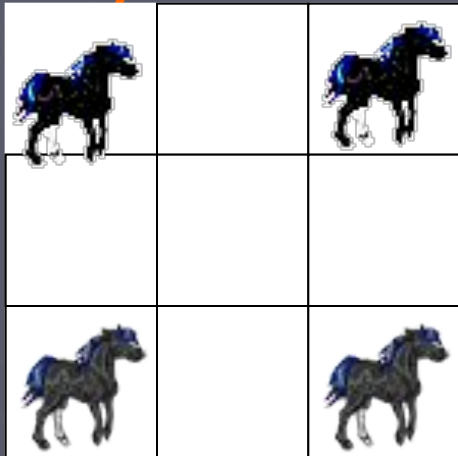
- 1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;
- 2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;
- 3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой-кончается;
- 4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

Графы

- *Задача: В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?*

Графы

рисунок



3. Решение задач с конца

- ▶ *В мире существует множество задач. Они встречаются нам не только на уроках математики, но и в повседневной жизни. Существует тип таких задач, в которых нет данных кроме последнего. Именно такие задачи решаются с конца.*
- ▶ *Рассмотрим задачу, которая была представлена в Международном конкурсе «Кенгуру» в 2008 году.*

Решение задач с конца

- *Задача: Васе поручили за несколько дней посадить в одну линию ровно 321 цветок. Каждый следующий день он должен сажать по одному цветку во все промежутки между уже посаженными цветами. На какое наибольшее число дней ему удастся растянуть эту работу?*

Решение задач с конца

Стало	Было	Посадил	День
321	161	160	7
161	81	80	6
81	41	40	5
41	21	20	4
21	11	10	3
11	6	5	2
6	-	-	1

Алгоритм Евклида

- *С помощью Алгоритма Евклида можно находить наибольший общий делитель двух чисел. Это помогает сокращать дроби с достаточно большими числителями и знаменателями.*

Алгоритм Евклида

- Для удобства длины этих отрезков также будем обозначать буквами a и b . Очевидно, что в случае, когда $a = b$, общей мерой служит любой из данных отрезков. Но допустим, $a > b$. Тогда можно отложить отрезок b на отрезке a максимальное число раз.
- ▶ Если отрезок a исчерпается целым количеством отрезков b , то отрезок b и будет их наибольшей общей мерой. Вполне вероятно, однако, что отрезок b не уложится на отрезке a целое число раз и останется небольшой «кусочек» r_1 . Естественно теперь и его испытать в качестве общей меры отрезков a и b . Он подойдёт на эту роль, если целое число раз уместится на отрезке b . Если же при этом опять получим остаток r_2 , то на следующем шаге будем испытывать отрезок r_2 , но уже по отношению к отрезку r_1 .
 - ▶ Если в конце концов получится такой отрезок r_k , который целое число раз отложится в предыдущем остатке r_{k-1} , то он и будет общей мерой всех отрезков. Если же этот процесс никогда не закончится, то общей меры у отрезков a и b не существует — они несоизм.

Алгоритм Евклида

► Задача: $a = 2000$, $b = 360$.

► $2000 = 360 \cdot 5 + 200$;

► $360 = 200 \cdot 1 + 160$;

► $200 = 160 \cdot 1 + 40$;

► $160 = 40 \cdot 4$.

Отсюда заключаем, что наибольший общий делитель чисел 2000 и 360 равен 40.

► В школе изучают способы нахождения НОД и НОК чисел, но предложенный способ (последовательное деление делителя на остаток) более эффективен, так как исключает возможность ошибки (потеря множителя при разложении числа на простые множители).

► Впервые этот метод упомянут в «Началах» Евклида, почему и вошёл в историю под названием «алгоритм Евклида». Алгоритм Евклида известен давно. Ему уже более 2 тыс. лет. Как способ нахождения наибольшей общей меры двух отрезков алгоритм Евклида был известен еще пифагорейцам

