

Научно - практическая конференция школьников "Эврика"

Решение комбинаторных задач с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы

Научно – исследовательский проект

Выполнен ученицей 10 «А» класса

СОШ № 74 г. Краснодара

Щегольковой Анной

Научный руководитель –

учитель математики СОШ № 74

Забашта Елена Георгиевна

Цель: • изучить и применить бином Ньютона и полиномиальную формулу к решению некоторых комбинаторных задач

Задачи:

- 1) ознакомиться с формулой бинома Ньютона и ее свойствами, рассмотреть треугольник Паскаля и метод его построения;
- 2) ознакомиться с полиномиальной формулой как обобщением бинома Ньютона;
- 3) рассмотреть некоторые комбинаторные задачи, решаемые с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы.

Язык перечислительной комбинаторики



$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$



Бином Ньютона и его свойства

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т.е. равно $n + 1$.

2. Сумма показателей степени a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома.

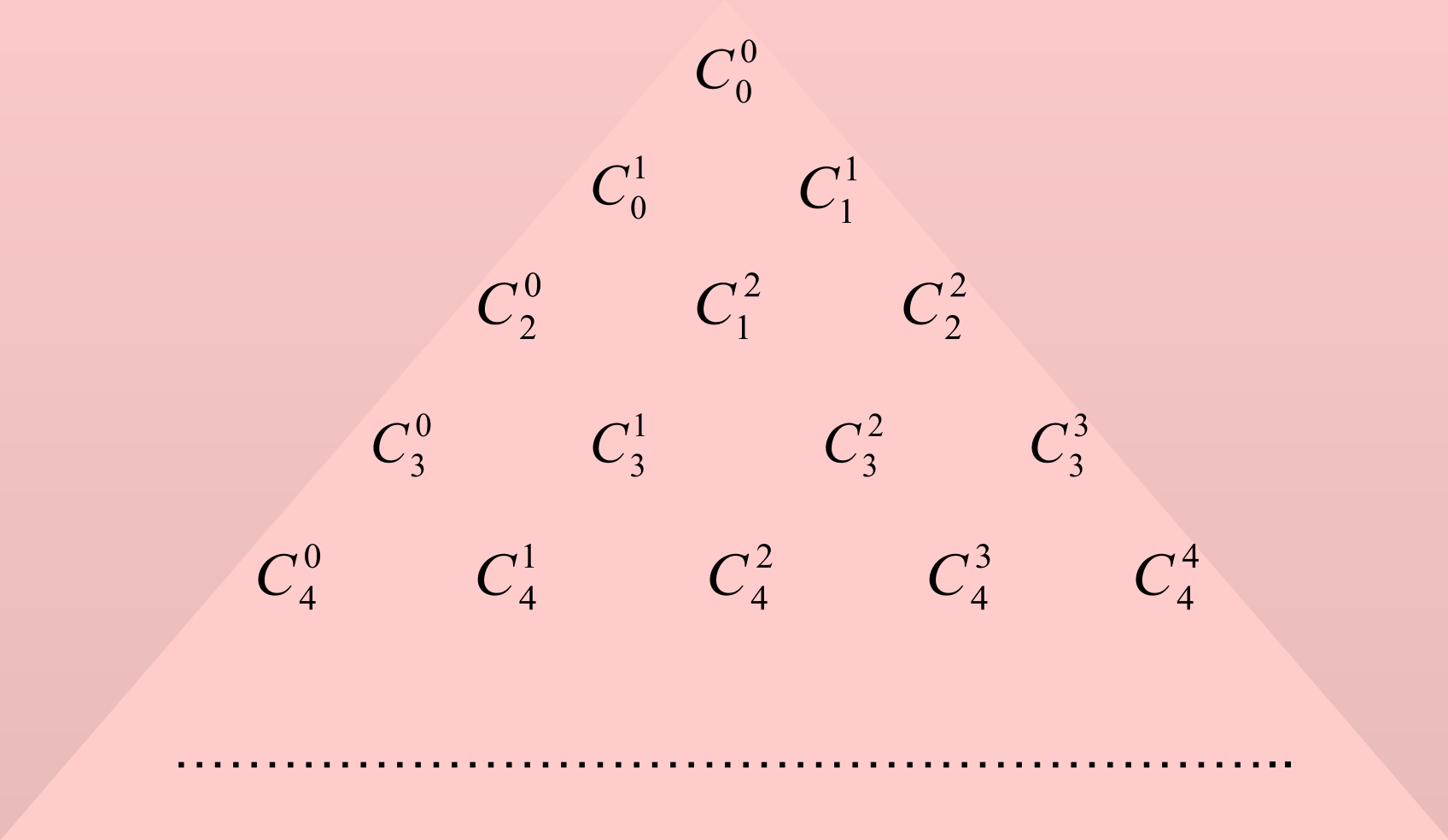
3. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0, 1, \dots, n.$$

4. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от краев, равны между собой. Правило симметрии $C_n^k = C_n^{n-k}$

5. Правило Паскаля $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

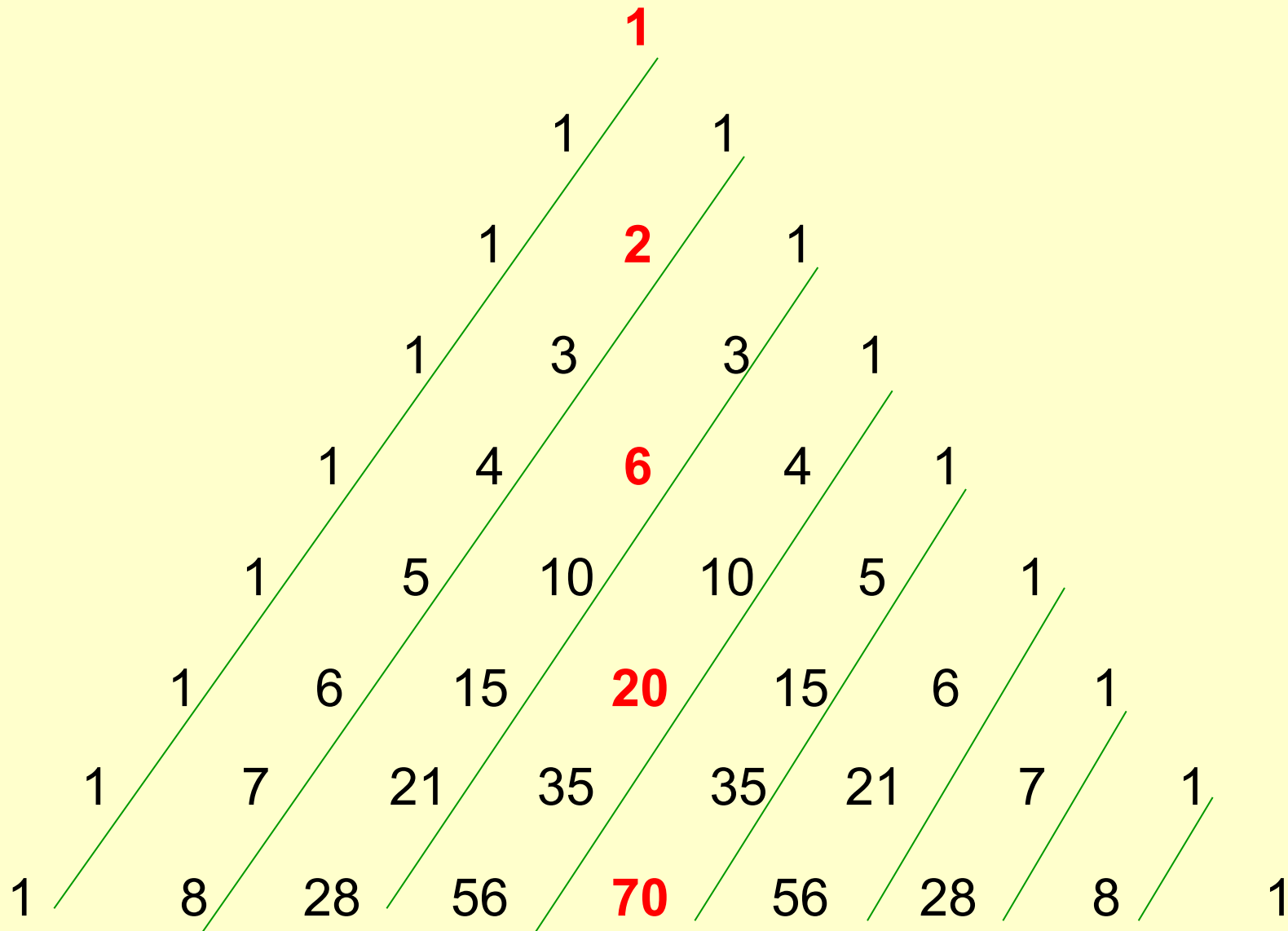
Треугольник Паскаля



A diagram of Pascal's Triangle, which is a triangular arrangement of binomial coefficients. The triangle is centered on a light pink background. It consists of five rows of numbers, with each row containing one more number than the row above it. The numbers are arranged in a way that each number is the sum of the two numbers directly above it. The triangle is bounded by a large, light pink triangle. Below the fifth row, there is a horizontal dotted line.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_1^2 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

.....



Некоторые соотношения для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \qquad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

Полиномиальная формула

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$$

Задача № 1

Доказать, что $3^{2n+3} - 24n + 37$ делится нацело на 64 при любом натуральном n .

Доказательство.

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} - 24n + 37 &= 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27 \cdot (1 + 8)^n - 24n + 37 = \\ &= 27 \cdot (C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \dots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 = \\ &= 27 + 216n + 8^2 (27 \cdot C_n^2 + 27 \cdot C_n^3 \cdot 8 + \dots + 27 C_n^n \cdot 8^{n-2}) - 24n + 37. \end{aligned}$$

Обозначив выражение в скобках через a , $a \in \mathbb{N}$, имеем:

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 64 + 192n + 64a$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

Задача № 2

Доказать неравенство Бернулли

$c^n > 1 + n(c - 1)$, где c – произвольное число, большее 1,
 n – натуральное число, большее 1.

Доказательство.

Для каждого натурального n и чисел $a = 1$ и $b = c-1$ верны равенства

$$c^n = (1 + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m b^m$$

По условию $b > 0$ и $n \geq 2$. Следовательно, каждое слагаемое (их по меньшей мере три) в полученной сумме строго положительно. Значит,

$$\sum_{m=0}^n C_n^m b^m \geq 1 + nb = \frac{n(n-1)}{2} b^2 > 1 + nb$$

и доказываемое неравенство верно.

Задача № 3

Найти разложение степени бинома $(2x - 3)^5$

Решение.

$$\begin{aligned}(2x - 3)^5 &= (a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 = \\ &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 + 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 = \\ &= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243\end{aligned}$$

Задача № 4

Найти разложение степени тринома $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^4 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4(x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2 x_3^3) + \\ &+ 6(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + 12(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2).\end{aligned}$$

