Равносильность уравнений

Выполнила: Цыденова Б.
Проверила: Щербакова И. И.

Определение:

- Два уравнения называются равносильными, если их множества решений равны

Теорема 1:

Пусть уравнение f(x) = g(x)задано на множестве X и h(x) – выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнение равносильны на множестве X.

Доказательство:

- Обозначим через T_1 множество решений уравнения (1), а через T_2 множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$. Но чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из T_1 является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из T_2 является корнем уравнения (1).

- Пусть число *а* – корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$ и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство f(a) = g(a), а выражение h(x) обращает в числовое выражение h(a). Поставим к обеим частям истинное равенства f(a) = g(a) числовое выражение h(a). Получим согласно свойства истинных числовых равенств истинное числовое равенство
- $$f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$$

- Итак, доказано, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), т.е. $T_1 C T_2$.
- Пусть, теперь b – корень уравнения (2). Тогда b ЄT_2 и при подстановке в уравнение обращает его в истинное числовое равенство f(b) + h(b) = g(b) + h(b).
- Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение – h(b). Получим истинное числовое равенство f(b) = g(b), которое говорит о том, что число b – корень уравнения (1).

- Итак, доказано, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1), т.е. *Т2 С Т1.*
- Так как *Т1С Т2* и *Т2 С Т1,* то по определению равных множеств *Т1С Т2* , а значит, уравнения (1) и (2) равносильны на множестве Х.
- При решении уравнений чаще всего используется не сама данная теорема, а следствия из нее:
- *1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.*
- *2. Если какое- либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2:

- **Пусть уравнение f(x) = g(x) на множестве X и h (x) – выражение, определенное на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения f(x) = g(x) и f(x) * h(x) = g(x) * h(x) равносильны на множестве X.**

- Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.
- Из теоремы 2 вытекает следствие, которое часто воспользуется при решении уравнений.
- Если обе части уравнений умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.
- Решим уравнение 1-x/3 = x/6, xЄ***R***, и выясним, какие теоретические положения при этом были использованы.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения к общему знаменателю: 6-2x/6 = x/6.	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения, получили уравнение, равносильное исходному.

2. Отбросим общий знаменатель: $6 - 2x = x$ 3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения: $6 = x + 2x$.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, исходному. Воспользовались следствием из теоремы 1 (или согласно теореме 1 прибавили к обеим частям выражение $2x$, определенное для всех действительных чисел), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.

4. Привели подобные члены в правой части уравнения: 3 / x = 2. 5. Разделили обе части уравнения на 3 / x = 2.	Выполнили тождественное преобразование, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному. Воспользовались следствием из теоремы 2, (или согласно теореме 2 умножили на 1/3), получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, исходному.

- Возьмем теперь уравнение $x(x - 1) = 2x$, $x Є R$. Иногда учащиеся решают его так: делят обе части на x, получают уравнение $x – 1 = 2$, откуда находят, что $x = 3$, и заключают: {3} – множество решений данного уравнения.
- Но верно ли решено данное уравнение? Найдены ли все такие действительные значения x, которые обращают уравнение $x(x – 1) = 2$ в истинное числовое равенство?
- Нетрудно видеть, что при $x = 0$ данное уравнение обращается в истинное числовое равенство $0*(0 – 1) = 2*0$. Значит, 0 – корень данного уравнения. Почему же произошла потеря этого корня?
- Дело в том, что уравнение $x – 1 = 2$ не равносильно уравнению $2(x – 1) = 2x$ на множестве действительных чисел, так как получено из последнего умножением на выражение $1/x$, которое определено не для всех действительных чисел (в частности, при $x = 0$ оно не имеет смысла), т.е. нами не выполнено условие теоремы 2, что и привело к потере корня.
- Как правильно решить уравнение $x(x - 1) = 2x$? Рассмотрим один из возможных вариантов решения.

Ход решения	Используемые теоретические положения
1. Перенесем выражение 2x из правой части в левую: $x(x-1)-2x=0$	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное данному.
2. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: $x(x-3)=0$	Выполнили тождественные преобразования, они не нарушили равносильности уравнения.

3. Произведение двух множителей равно нулю в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому х = 0 или х – 3 = 0. 4. Перенеся число 3 в правую часть второго уравнения, получаем: х = 0 или х =3.	Воспользовались условием равенства нулю произведения нескольких множителей, получили совокупность уравнений, равносильных исходному. Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное уравнению х – 3 = 0.

- Таким образом, множество решений данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, т.е. имеет вид {0, 3}.
- Заметим, что невыполнение условий теорем 1 и 2 может привести не только к потере корней уравнения, но ик появлению так называемых посторонних корней.
- Какие корни считают посторонними?
- Пусть даны уравнения: f1(x) = g1(x) и f2(x) = g2(x) (2). Если известно, что все корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2), то про уравнение (2) можно сказать, что оно следует из уравнения (1) или что уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Если же уравнение (2)имеет корни, не удовлетворяющие уравнению (1), то они будут посторонними для уравнения (1). Например, решая уравнение 5x – 15/(x + 2)(x - 3) = 0, мы освобождаемся от знаменателя, умножив обе части уравнения на (x + 2)(x - 3), и получаем 5x – 15 = 0, откуда x = 3. Но при x = 3 знаменатель дроби 5x – 15/(x + 2)(x - 3) обращается в нуль, и поэтому x = 3 не может быть корнем исходного уравнения, т.е. x = 3 оказывается для него посторонним корнем.

- Вообще если при решении уравнения его заменяют следствием, (а не равносильным уравнением), то надо найти все корни уравнения-следствия, а затем их проверить, подставив в исходное уравнение. Посторонние корни отбрасывают.
- Следует заметить, что приобретение посторонних корней менее «опасное» явление, чем их потеря. Поэтому при решении уравнений необходимо в первую очередь строго следить за правильным применением теорем о равносильности.