

Городская научно – социальная программа «Шаг в будущее, Электросталь»

МОУ «Гимназия № 4»

Реферат.

Тема:

**« Рациональные алгебраические уравнения.
Некоторые методы решения. »**

Автор: ученик 10 «А» класса
Скоряков Сергей

Руководитель: Бродецкая Т.А.

**Электросталь
2009**



Содержание.

1. Стандартные алгебраические уравнения.
2. Некоторые методы решения уравнений степени, большей трёх.
 - а) Метод замены.
 - б) Метод разложения. Поиск рациональных корней.
3. Некоторые методы решения дробно-рациональных уравнений.



Рациональные алгебраические выражения.

Рациональное алгебраическое выражение – это выражение составленное из чисел и переменных, в котором разрешается применять только четыре арифметических действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Различают два типа рациональных алгебраических выражений – **целые** и **дробные**, или *дробно-рациональные*.



Алгебраическое уравнение и схема его решения

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \quad P, Q \in R[x].$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$



Пример 1 .

$$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}. \quad (1^*)$$

$$(1^*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 - (x-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0, \\ x^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x = 1, \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.



Стандартные полиномиальные уравнения $p_n(x) = 0$.

1. Линейные уравнения.
2. Квадратные (квадратичные) уравнения.
3. Двучленные уравнения произвольной степени.
4. Биквадратные уравнения.



1) Линейные уравнения (степень $n=1$):

$$ax + b = 0, \quad (a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad ax = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

2) Квадратные (квадратичные) уравнения ($n=2$):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D < 0$



нет корней

Если $D = 0$



$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Если $D > 0$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



3) Двучленные уравнения произвольной степени ($n \geq 2$):

$$ax^n + b = 0, \quad x^n = c.$$

Если $n = 2k + 1$ (*нечётно*), то при любом значении c уравнение имеет *единственное* решение:

$$x_0 = \sqrt[n]{c}$$

Если $n = 2k$ чётно, то:

при $c < 0$



корней нет

при $c = 0$



$x = 0$

при $c > 0$



$$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{c}$$



4) Биквадратные уравнения ($a \neq 0$):

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

Бикубические уравнения ($a \neq 0$):

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

Общая схема решения

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad n \in N, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0,$$

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^n = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$



Метод замены.

Исходное уравнение $F(x) = 0$ представим в виде $f(\varphi(x)) = 0$.

Выполним замену $\varphi(x) = z$, решаем $f(z) = 0$.

Находим значения $z = z_1, z_2 \dots$

Решаем уравнения замены $\varphi(x) = z_1, \varphi(x) = z_2, \dots$

Схема замены:

$$f(\varphi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = z_1 \quad \vee \quad \varphi(x) = z_2 \quad \vee \quad \dots,$$

где $z_1, z_2 \dots$ корни уравнения $f(z) = 0$.



Пример 2. $2007(x^4 - 6x^2 + 9) + 2006(x^2 - 3) - 1 = 0.$

$$y = x^2 - 3,$$

$$2007y^2 + 2006y - 1 = 0.$$

$$y_1 = -1,$$

$$y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{2007},$$

$$y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{2007},$$

$$x^2 - 3 = -1 \quad \text{и} \quad x^2 - 3 = \frac{1}{2007}.$$

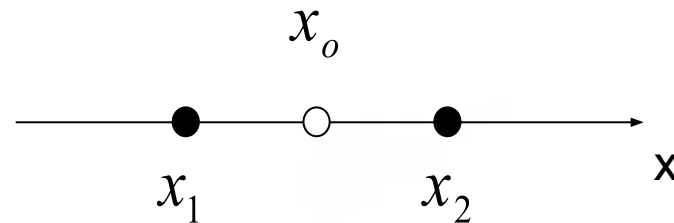
$$x = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm\sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$



Линейные замены, основанные на симметрии.

Пример 3. $x^4 + (x+2)^4 = 82.$



$$\frac{x + (x+2)}{2} = x+1 = z,$$

$$x = z-1, \quad x+2 = z+1,$$

$$(z-1)^4 + (z+1)^4 = 82,$$



$$2z^4 + 12z^2 + 2 = 82 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 + 6z^2 - 40 = 0.$$

$$z^4 + 6z^2 - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 - 4)(z^2 + 10) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = 4 \quad \vee \quad z^2 = -10 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2.$$

$$x + 1 = \pm 2,$$

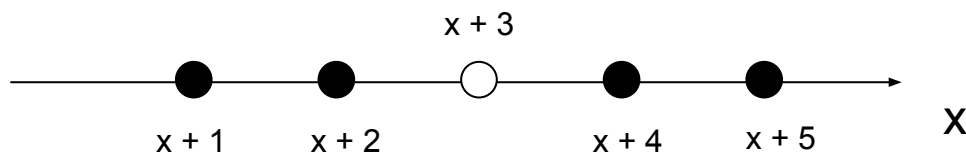
$$x = 2 - 1 = 1 \quad \text{и} \quad x = -2 - 1 = -3.$$

Ответ: $x_1 = 1,$ $x_2 = -3.$



Пример 4.

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40. \quad (2^*)$$



$$x = z - 3,$$

$$(2^*) \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)(z-1)(z+1)(z+2) = 40,$$

$$(z^2 - 4)(z^2 - 1) = 40,$$

$$z^2 = u,$$

$$(u-4)(u-1) = 40 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 5u - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} -4, \\ 9. \end{cases}$$



1) $u = z^2 \geq 0$, исключаем $u = -4$.

2) $z^2 = 9 \Leftrightarrow z = \pm 3$,
 $x = z - 3 = \pm 3 - 3$,
 $x = 0$ и $x = -6$.

II способ

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40.$$

Группируем $x+1$, $x+5$ и $x+2$, $x+4$.

Получаем $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40$.

Возможные замены $x^2 + 6x = y$, $x^2 + 6x + 5 = u$.

$$1 + 5 = 2 + 4.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -6$.



Метод разложения.

$$p_n(x) = 0,$$

$$p_k(x)p_m(x) = 0,$$

где $\deg p_k(x) = k > 0, \quad \deg p_m(x) = m > 0,$

т.к. $k + m = n, \quad \text{то } k, m < n.$

Схема решения:

$$\begin{aligned} p_n(x) = 0 & \Leftrightarrow p_k(x)p_m(x) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow p_k(x) = 0 \quad \vee \quad p_m(x) = 0. \end{aligned}$$



Пример 5 .

$$(x-2)^3 + (x+4)^3 = (2x+2)^3.$$

$$(x-2+x+4)((x-2)^2 - (x-2)(x+4) + (x+4)^2) = (2x+2)^3,$$

$$(2x+2)(x^2 - 4x + 4 - x^2 - 2x + 8 + x^2 + 8x + 16) = (2x+2)^3,$$

$$(2x+2)(x^2 + 2x + 28 - 4x^2 - 8x - 4) = 0,$$

$$2x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad -3x^2 - 6x + 24 = 0.$$

$$x_1 = -1.$$

$$x_2 = -4, \quad x_3 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$.



Теорема (о рациональных корнях целочисленных многочленов).

Если **несократимая** дробь $x_0 = \frac{p}{q}$ является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_k \in \mathbb{Z},$$

то числитель дроби **p** является делителем свободного члена полинома, а знаменатель **q** – делителем старшего коэффициента .

Если уравнения имеет хотя бы один рациональный корень, то он находится среди дробей вида

$$f_{ik} = \pm \frac{p_i}{q_k}.$$



Пример 6.

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0.$$

Возможные корни: -2, -1, 1, 2. **Подбором** $x = 2$ - корень.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 6x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x^2 + 13x \\ - \\ -6x^2 + 12x \end{array}$$

$$(x - 2)(x^2 - 6x + 1) = 0,$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$x_1 = 2.$$

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 2, \quad x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}.$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ - \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$



Пример 7.

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0.$$

1) $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$ не являются корнями, т.к.

$$p_8(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \text{ и } p_8(-1) = 5.$$

2) при $x < 0$ $p_8(x) > 0$, нет корней.

3) при $x > 1$ $x^8 > x^5$, $x^2 > x$,
 $p_8(x) > 0$, нет корней.

4) $x \in (0;1)$, $1 - x > 0$, $x^2 - x^5 > 0$,
 $p_8(x) = (1 - x) + (x^2 - x^5) + x^8 > 0$,
нет корней.

Ответ: нет корней.



Пример 8.

$$(x^2 - 3x + 6)(x^2 - 4x + 6) = 12x^2 \quad \Big| : x^2 \neq 0,$$

$$\left(x - 3 + \frac{6}{x}\right)\left(x - 4 + \frac{6}{x}\right) = 12,$$

$$y = x + \frac{6}{x},$$

$$(y - 3)(y - 4) = 12,$$

$$y^2 - 7y + 12 = 12,$$

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 = 7,$$

$$x + \frac{6}{x} = 0,$$

нет корней.

$$x + \frac{6}{x} = 7,$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 6, \quad x_2 = 1.$



Некоторые методы решения дробно-рациональных уравнений.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Например:

$$\begin{aligned} kx + \frac{ax + b}{cx + d} = m &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} kx(cx + d) + ax + b - m(cx + d) = 0, \\ cx + d \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Пример 9.

$$(x+2)^2 + \frac{24}{x^2 + 4x} = 18. \quad \text{ОДЗ: } x^2 + 4x \neq 0.$$

$$(x^2 + 4x + 4) + \frac{24}{x^2 + 4x} = 18.$$

$$y = x^2 + 4x \quad (y \neq 0),$$

$$y + 4 + \frac{24}{y} = 18.$$

$$y_1 = 12, y_2 = 2.$$

$$x^2 + 4x = 12 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x = 2.$$

$$x_1 = -6, x_2 = 2. \quad x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1 = -6, x_2 = 2, x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}.$



Пример 10.

$$\frac{x^4 + 324}{x^2 + 6x + 18} = 43 - 6x.$$

$$\frac{(x^4 + 36x^2 + 324) - 36x^2}{x^2 + 6x + 18} = 43 - 6x,$$

$$\frac{(x^2 + 18)^2 - 36x^2}{x^2 + 6x + 18} = 43 - 6x,$$

$$\frac{(x^2 + 18 + 6x)(x^2 + 18 - 6x)}{x^2 + 6x + 18} = 43 - 6x.$$

Сократим дробь, т.к. $x^2 + 6x + 18 > 0$.

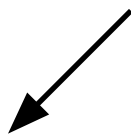
$$x^2 - 6x + 18 = 43 - 6x,$$

$$x_1 = -5, x_2 = 5.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 5$.



Основные методы решения уравнений степени большей трёх



**метод
замены**



**метод
разложения**



Заключение

Теория уравнений интересовала и интересует математиков всех времён и народов. Им посвящали научные трактаты и даже слагали стихи великие люди истории.

В своей работе мы постарались систематизировать известные нам знания о теории уравнений, показать красоту и изящество некоторых способов решения уравнений.

