Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции.

Лекция 12

Предположим, что в уравнении z=F(u,v)   (1) u,v - функции независимых переменных x,y:

$u = \varphi(x, y); v = \psi(x, y)$ (2)

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x,y.

В общем случае z можно выразить через x,y непосредственно, а именно:

$z = F(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ (3)

Пример 1 $z = u^3 v^3 + u + 1; u = x^2 + y^2; v = e^{x+y} + 1$.

Тогда $z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1$

Предположим, что $F(u, v), \varphi(x, y), \psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Задача. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ исходя из уравнений (1),(2), не пользуясь уравнением (3).

Даем аргументу x приращение Δx, оставляя y неизменной, тогда u,v получают приращения $\Delta_x u, \Delta_x v$. Но если u,v получают приращения $\Delta_x u, \Delta_x v$, то и функция z=F(u,v) получит приращение Δz, определяемое следующей формулой: $\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$

Разделим обе части равенства на Δx: $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$.

Если $\Delta_x u \to 0, \Delta_x v \to 0$ (в силу непрерывности функций u,v), то $\gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ получим

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\partial x}; \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0; \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$ Следовательно:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ (4)   аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$ (4’)

Пример 2 $z=\ln(u^2+v), u=e^{x+y^2}; v=x^2+y$

Решение $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v}; \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v}; \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2}; \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2}; \frac{\partial v}{\partial x}=2x; \frac{\partial v}{\partial y}=1$

Используя формулы (4),(4') получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1);$$

В последнем выражении вместо *u,v* можно подставить их выражения.

Для случая большего числа переменных формулы (4),(4') обобщаются.

Например, для *w=F(z,u,v,s),* которая является функцией 4-х переменных, и каждая их которых зависит от переменных *x,y*, то формула (4),(4') принимает вид: $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$ (5)

Если задана функция *z=F(x,y,u,v)*, где *y,u,v* - в свою очередь зависят от одного аргумента *x* $y=f(x), u=\varphi(x), v=\psi(x)$, то по сути *z* - функция от одного аргумента. Тогда можно рассмотреть вопрос о нахождении $\frac{dz}{dx}$

Эта производная вычисляется по первой из формул (5), то есть

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$. Но так как *y,u,v* – функции только одного переменного *x*, то частные производные обращаются в обыкновенные, и кроме того $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, поэтому $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$. Это формула для вычисления полной производной $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{dz}{dx}$)

Пример 3 $z = x^2 + \sqrt{y};\, y = \sin x; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{y}} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

Найдем полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (1),(2).

Формула полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ (6)

Подставляя выражения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (4),(4') получим

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Выполнив преобразование в правой части, получим

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$ (7)

Но так как $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv \end{cases}$ (8), то

равенство (7) с учетом равенства (8) можно переписать так: $dz = \frac{\partial F}{\partial x}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv$ (9)

или $dz = \frac{\partial z}{\partial x}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$ (9')

Сравнивая (6) и (9') , можно сказать, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеет тот же вид, то есть форма дифференциала инвариантна, являются ли u,v независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пример. Найти полный дифференциал сложной функции $z = u^2 + v^3; u = x^2 \sin y; v = x^3 e^y$

Решение По формуле (9')

имеем $dz = 2uv^3 du + 3u^2 v^2 dv = 2uv^3(2x\sin y dx + x^2\cos y dy) + 3u^2v^2(3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy)$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$dz = (2uv^3 2x\sin y dx + 3u^2v^2)dx + (2uv^3 x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Производная от функции заданной неявно

Начнем рассмотрение этого вопроса с неявной функции одного переменного. Пусть некоторая функция определена уравнением

F(x,y)=0

Теорема. Пусть непрерывная функция y от x задана уравнением (1), где $F(x,y), F_x^{'}(x,y), F_y^{'}(x,y)$ - непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению (1); кроме того, в этой точке $F_y^{'}(x,y) \neq 0$. Тогда функция y от x имеет производную $y_x^{'} = -\dfrac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$ (2)

Доказательство

Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y при этом F(x,y)=0

Для $x \Rightarrow \Delta x; y \Rightarrow \Delta y; x+\Delta x \Rightarrow y+\Delta y;$

В силу $F(x,y)=0 \Rightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0 \Rightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0$. Это можно записать в виде $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$, где при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$

Так как левая часть равенства равна 0, то $\dfrac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y=0$. Делим на Δx и вычисляем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}$

При $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$ и $F_y^{'}(x,y) \neq 0$, то в пределе получим $y_x^{'} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ (2')

Доказано существование $y_x^{'}$ от функции, заданной неявно, нашли формулу для ее вычисления.

Пример 1 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - неявная функция.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Пример 2 $e^y - e^x + xy = 0$

$$F(x, y) = e^y - e^x + xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - e^x + y; \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

Рассмотрим уравнение вида F(x,y,z)=0 (3)

Если каждой паре x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению (3), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x,y.

Например $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Для z'_x, z'_y имеют место формулы $z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Предполагается, что

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Пример 3 $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$

Дифференцируя эту функцию как явную (после разрешения уравнения относительно z) получили бы тот же результат

Пример 4

$$e \quad + x^2 y + z + 5 = 0$$

$$F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5; \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Частные производные различных порядков

Рассмотрим функцию z=f(x,y). $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y);\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$- функции переменных x,y, от которых можно снова находить частные производные. Частных производных второго порядка от функций двух переменных четыре, так как каждую из функций $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y);\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ можно дифференцировать как по x, так и по y.

Обозначение

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'_{xx}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x, затем по y.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y, затем по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получаем частные производные третьего порядка. Их будет восемь $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dots,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. В общем случае частная производная n-го порядка есть первая производная от производной (n-1) порядка.

Формула $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\partial y^{n-p}}$ - соответствует производной n-го порядка. Функция z сначала p раз дифференцируется по x, затем n-p раз по y.

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

<u>Пример 1</u> $z = x^2 y + y^3$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

<u>Пример 2</u> $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2; \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2$$

<u>Пример 3</u> $u = z^2 e^{x+y^2}$. Найти $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}; \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}$$

Производная по направлению.

Пусть функция u = f (x, y, z) непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку M(x,y,z) и проведем из нее вектор S, направляющие косинусы которого cosα, cosβ, cosγ. На векторе S на расстоянии Δs от его начала найдем точку M1(x+Δx, y+Δy, z+Δz), где

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Представим полное приращение функции f в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \delta\Delta x + \varepsilon\Delta y + \lambda\Delta z,$$ где $$\lim_{\Delta s\to 0}\delta = \lim_{\Delta s\to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta s\to 0}\lambda = 0.$$

После деления на Δs получаем:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \delta\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon\frac{\Delta y}{\Delta s} + \lambda\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s}\cos\gamma,$ предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma + \delta\cos\alpha + \varepsilon\cos\beta + \lambda\cos\gamma \qquad (1)$$

Градиент.

Определение Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется **производной от функции u = f (x, y, z) по направлению вектора S** и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

При этом из (1) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Замечание 1. Частные производные являются частным случаем производной по направлению. Например, при $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ получаем:

- $$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Замечание 2. Выше определялся геометрический смысл частных производных функции двух переменных как угловых коэффициентов касательных к линиям пересечения поверхности, являющейся графиком функции, с плоскостями x = x0 и y = y0. Аналогичным образом можно рассматривать производную этой функции по направлению *l* в точке M(x0 , y0) как угловой коэффициент линии пересечения данной поверхности и плоскости, проходящей через точку M параллельно оси Oz и прямой *l*.

Определение Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции u = f (x, y, z) в этой точке, называется градиентом функции u = f (x, y, z).

Обозначение: grad u = $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

Свойства градиента.

1. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора **S** равняется проекции вектора grad u на вектор **S**.

Доказательство. Единичный вектор направления **S** имеет вид eS ={cosα, cosβ, cosγ}, поэтому правая часть формулы (4.7) представляет собой скалярное произведение векторов grad u и es, то есть указанную проекцию.

2. Производная в данной точке по направлению вектора S имеет наибольшее значение, равное |grad u |, если это направление совпадает с направлением градиента.

Доказательство. Обозначим угол между векторами S и grad u через φ. Тогда из свойства 1 следует, что $\frac{\partial u}{\partial s} =$ grad u |·cosφ, (4.8)

следовательно, ее наибольшее значение достигается при φ=0 и равно |grad u|.

3. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору grad u , равна нулю.

Доказательство. В этом случае в формуле (4.8) $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0, \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$

4. Если z = f (x,y) – функция двух переменных, то grad f = $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ направлен перпендикулярно к линии уровня f (x,y) = c, проходящей через данную точку.

Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Нахождение наибольших и наименьших значений.

Определение 1. Точка M_0 (x_0 , y_0) называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_o, y_o) > f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0.

Определение 2. Точка M_0 (x_0 , y_0) называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_o, y_o) < f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0.

Замечание 1. Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции нескольких переменных.

Замечание 2. Аналогичным образом определяется точка экстремума для функции от любого количества переменных.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если M_0 (x_0 , y_0) – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.

Доказательство.

Зафиксируем значение переменной y, считая y = y0. Тогда функция f (x, y0) будет функцией одной переменной x, для которой x = x0 является точкой экстремума. Следовательно, по теореме Ферма $f'_x(x_0, y_0) = 0$ или не существует. Аналогично доказывается такое же утверждение для $f'_y(x_0, y_0)$.

Определение 3. Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются **стационарными точками** этой функции.

Замечание. Таким образом, экстремум может достигаться только в стационарных точках, но не обязательно он наблюдается в каждой из них.

Примеры.

1. Найдем стационарную точку функции $z = x^2 + y^2$. Для этого решим систему уравнений $z'_x = 2x = 0, z'_y = 2y = 0,$ откуда x0 = y0 = 0. Очевидно, что в этой точке функция имеет минимум, так как при x = y = 0 z = 0, а при остальных значениях аргументов z > 0.
2. Для функции z = xy стационарной точкой тоже является (0, 0), но экстремум в этой точке не достигается (z (0, 0) = 0, а в окрестности стационарной точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения).

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки $M_0 (x_0 , y_0)$, являющейся стационарной точкой функции $z = f (x, y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C.$ Тогда:

1) $f (x, y)$ имеет в точке M_0 максимум, если $AC – B^2 > 0$, $A < 0$;
2) $f (x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если $AC – B^2 > 0$, $A > 0$;
3) экстремум в критической точке отсутствует, если $AC – B^2 < 0$;
4) если $AC – B^2 = 0$, необходимо дополнительное исследование.

Пример. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$. Для поиска стационарных точек решим систему $\begin{cases} z'_x = 2x - 2y + 2 = 0 \\ z'_y = -2x + 4y = 0 \end{cases}$. Итак, стационарная точка (-2,-1). При этом $A = 2$, $B = -2$, $C = 4$. Тогда $AC – B^2 = 4 > 0$, следовательно, в стационарной точке достигается экстремум, а именно минимум (так как $A > 0$).

Условный экстремум.

Определение 4. Если аргументы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связаны дополнительными условиями в виде m уравнений ($m < n$):

$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, …, $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, (1)

где функции φ_i имеют непрерывные частные производные, то уравнения (1) называются **уравнениями связи**.

Определение 5. Экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при выполнении условий (1) называется **условным экстремумом**.

Замечание. Можно предложить следующее геометрическое истолкование условного экстремума функции двух переменных: пусть аргументы функции $f(x,y)$ связаны уравнением $\varphi(x,y) = 0$, задающим некоторую кривую в плоскости Oxy. Восставив из каждой точки этой кривой перпендикуляры к плоскости Oxy до пересечения с поверхностью $z = f(x,y)$, получим пространственную кривую, лежащую на поверхности над кривой $\varphi(x,y) = 0$. Задача состоит в поиске точек экстремума полученной кривой, которые, разумеется, в общем случае не совпадают с точками безусловного экстремума функции $f(x,y)$.

Определим необходимые условия условного экстремума для функции двух переменных, введя предварительно следующее определение:

Определение 6. Функция $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (2)

где λ_i – некоторые постоянные, называется **функцией Лагранжа**, а числа λ_i – **неопределенными множителями Лагранжа**.

Теорема (необходимые условия условного экстремума). Условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ может достигаться только в стационарных точках функции Лагранжа $L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

Доказательство. Уравнение связи задает неявную зависимость y от x, поэтому будем считать, что y есть функция от x: $y = y(x)$. Тогда z есть сложная функция от x, и ее критические точки определяются условием: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$. (3)

Из уравнения связи следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$. (4)

Умножим равенство (4) на некоторое число λ и сложим с (3). Получим:

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$, или $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = L'_x + L'_y\frac{dy}{dx} = 0$.

Последнее равенство должно выполняться в стационарных точках, откуда следует:

$$\begin{cases} L'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ L'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Получена система трех уравнений относительно трех неизвестных: x, y и λ, причем первые два уравнения являются условиями стационарной точки функции Лагранжа. Исключая из системы (5) вспомогательное неизвестное λ, находим координаты точек, в которых исходная функция может иметь условный экстремум.

Замечание 1. Проверку наличия условного экстремума в найденной точке можно провести с помощью исследования частных производных второго порядка функции Лагранжа по аналогии с теоремой 2.

Замечание 2. Точки, в которых может достигаться условный экстремум функции f (x1 , x2 ,…, xn) при выполнении условий (1), можно определить как решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \dotfill \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \dotfill \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Пример. Найдем условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y) = xy + \lambda (x + y - 1)$. Система (6) при этом выглядит так:

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

, откуда $-2\lambda=1$, $\lambda=-0,5$, $x = y = -\lambda = 0,5$. При этом $L(x, y)$ можно представить в виде $L(x, y) = -0,5(x - y)^2 + 0,5 \le 0,5$, поэтому в найденной стационарной точке $L(x, y)$ имеет максимум, а $z = xy$ – условный максимум.