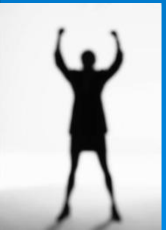
Логарифмические уравнения и неравенства. Методы решения

$y=\log_{2x-1}(x^2-2x-7)$

Exit

- Логарифмы в истории
- Логарифм
- Логарифмическая функция $f(x)=\log_a x$
- Логарифмические уравнения
- Логарифмические неравенства



Открытие логарифмов - еще одна историческая цепочка знаний, которая связана не только с математикой, но и, казалось бы, совсем не имеющей к ней отношение музыкой.
Обращаемся к школе Пифагора (VI-IV вв. до н.э.), открытию в области числовых отношений, связанных с музыкальными звуками. Вся пифагорейская теория музыки основывалась на законах "Пифагора-Архита".
1. Высота тона (частота колебаний f) звучащей струны обратно пропорциональна ее длине l / f = a / l (a - коэффициент пропорциональности, характеризующий физические свойства струны).
2. Две звучащие струны дают консонанс (приятное созвучие), если их длины относятся, как 1:2, 2:3, 3:4.
Пифагорова гамма была несовершенной, так как не позволяла транспонировать (переводить из тональности в тональность) мелодию. И лишь только в 1700 году немецкий органист А.Веркмайстер осуществил смелое и гениальное решение, разделив октаву (геометрически) на двенадцать равных частей. Какую же роль сыграли здесь логарифмы? Дело в том, что в основе музыкальной гаммы лежит геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, которая является иррациональным числом, при нахождении приближенного значения которого используются логарифмы.

Идея логарифма возникла также в Древней Греции. Так, в сочинении "Псамлигт" Архимеда (287 - 212 гг. до н.э.) мы читаем: "Если будет дан ряд чисел в непрерывной пропорции начиная от 1 и если два его члена перемножить, то произведение будет членом того же ряда, настолько удаленным от большего множителя, насколько меньший удален от единицы, и одним членом меньше против того, насколько удалены оба множителя вместе". Здесь под "непрерывной пропорцией" Архимед разумеет геометрическую прогрессию, которую мы записали бы так: 1, a, a^2... В этих обозначениях правило, сформулированное Архимедом, будет выражено формулой: $a^m * a^n = a^{m+n}$.
Историческое развитие понятия логарифма завершилось в XVII веке. В 1614-м в Англии были опубликованы математические таблицы для выполнения приближенных вычислений, в которых использовались логарифмы. Их автором был шотландец Дж.Непер (1550-1617 гг.). В предисловии к своему сочинению Дж.Непер писал: "Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обыкновенно отпугивает многих от изучения математики".
Так вслед за изобретением логарифмов и развитием алгебры иррациональных чисел в музыку вошла равномерная темперация (новый двенадцатизвуковой строй).

Что такое логарифм?

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$a > 0, a \neq 0, b > o.$$

Основные свойства логарифмов

1) Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N1 > 0$, $N2 > 0$).

Замечание. Если $N1 \cdot N2 > 0$, тогда свойство примет вид

$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2|$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N1 \cdot N2 > 0$).

2) Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_b N_2$$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N1 > 0$, $N2 > 0$).

Замечание. Если , (что равносильно $N1N2 > 0$) тогда свойство примет вид

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_b |N_2|$$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N1N2 > 0$).

3) Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

$$\log_a N^k = k\log_a N \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0).$$

Замечание. Если *k* - четное число (*k* = 2*s*), то

$$\log_a N^{2s} = 2s\log_a |N| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N \neq 0).$$

4) Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0),$$

в частности, если *b* = *c*, получим

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$).

5) Из вышеуказанных свойств вытекают следующие формулы:

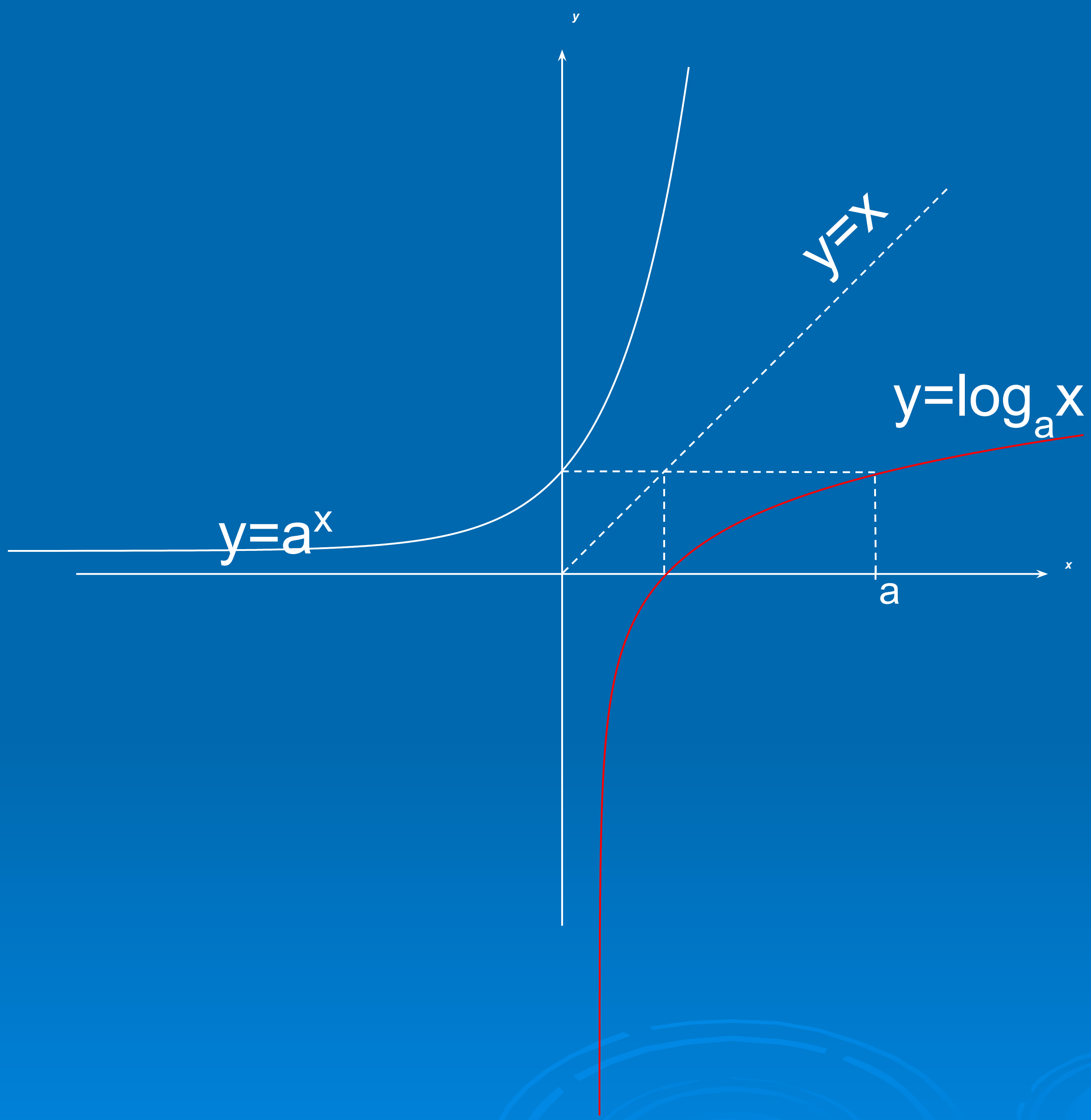
$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c}\log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

$$\log_{a^{2k}} b = \frac{1}{2k}\log_{|a|} b, (b > 0, a \neq 0, |a| \neq 1),$$

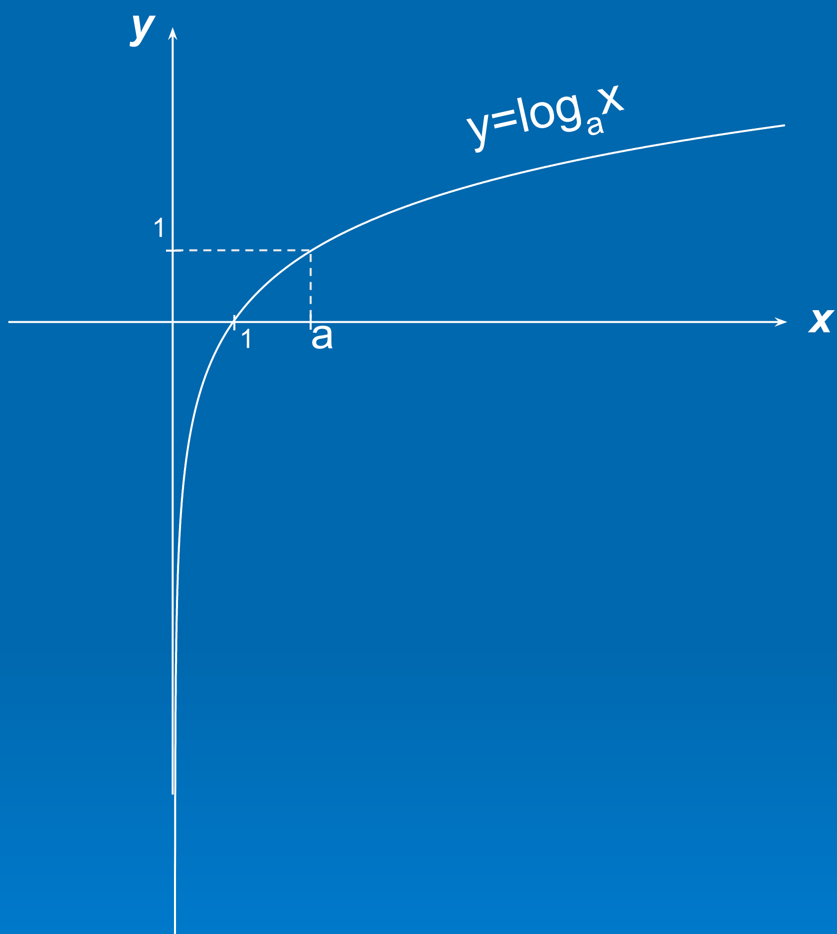
$$\log_a b^{2k} = 2k\log_a |b|, (b > 0, a \neq 0, |a| \neq 1)$$



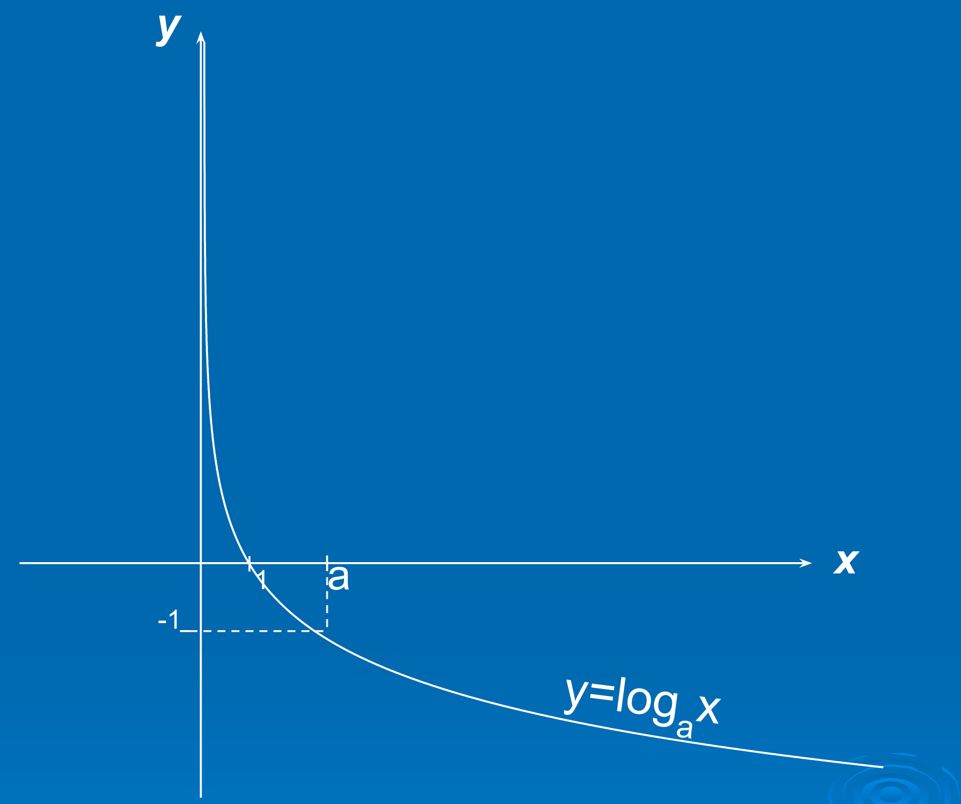
y
y=x
y=log_a x
y=a^x
x
a

1. Область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел.
2. Область значений логарифмической функции - множество действительных чисел.
3. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0<x_1<x_2$ => $\log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0<a<1$, - строго убывает ($0<x_1<x_2$ => $\log_a x_1>\log_a x_2$).
4. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$.
5. Если $a > 1$, то логарифмическая функция отрицательна при x Î (0;1) и положительна при x Î (1;+∞), а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при x Î (0;1) и отрицательна при x Î (1;+∞).
6. Если $a > 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если a Î (0;1) - выпукла вниз.

$a>1$



$0<a<1$



Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

1) Простейшее логарифмическое уравнение $\mathbf{\log_a x = b}$.

Решением является $x=a^b$

2) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \longleftrightarrow \begin{cases} f(x)= g(x), \\ g(x)>0, \\ f(x)>0. \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)= g(x), \\ g(x)>0, \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)= g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$

4) $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Потеря решений при неравносильных переходах

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad f(x) = g(x)$$

Методы решения логарифмических уравнений

- **Использование определения логарифма**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$$\mathbf{\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3}$$

Решение

$5+3\log_2(x-3)=2^3 \Leftrightarrow \log_2(x - 3) = 1 \Leftrightarrow \underline{x=5}$

Методы решения логарифмических уравнений

- **Использование свойств логарифма**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$$\boldsymbol{\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24),}$$

Решение

О.Д.З.: $x>0$,

$$x(x+3)=x+24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\{-6;4\} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=4}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- **Метод подстановки**

$$f(\log_a x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_a x \\ f(t)=0 \end{cases}$$

Пример

$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

Решение

$$\begin{cases} \lg x = t \\ t^2-3t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=1 \\ \lg x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underline{x=\{10;100\}}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$

$$\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$$

Пример

$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x=100

Методы решения логарифмических уравнений

- **Уравнения, содержащие выражения вида**

$$f(x)^{\log_a g(x)}$$

Пример

$$(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2)$$

Решение

$$\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4(x+2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2) * \log_2(x+2) = 2 + \log_2(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+2)=t, \\ t^2-t-2=0. \end{cases} \rightarrow x = \{-3/2; 2\}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- Метод оценки левой и правой частей

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

Решение

1) $2x - x^2 + 15 = -(x^2 - 2x - 15) = -((x^2 - 2x + 1) - 1 - 15) = (16 - (x - 1)^2) \le 16 \Leftrightarrow \log_2 (2x - x^2 + 15) \le 4.$

2) $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 5 = (x - 1)^2 + 4 \ge 4;$

$$\begin{cases} \log_2 (2x - x^2 + 15) = 4, \\ x^2 - 2x + 5 = 4. \end{cases} \longleftrightarrow \underline{x=1}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- Использование монотонности функций. Подбор корней.

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

Решение $\left.\begin{array}{l} 2x - x^2 + 15 = t,\ t > 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 20 - t \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 t = 20 - t$

$y=\log_2 t$ – возрастающая, ***$y=20-t$*** – убывающая. Геометрическая интерпретация дает понять, что исходное уравнение имеет единственный корень, который нетрудно найти подбором, ***$t=16$***. Решив уравнение ***$2x-x^2+15=16$,*** находим, что ***$x=1$***

Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

1) $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ a>1. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<a<1. \end{array}\right.$

2) $\log_{h(x)}f(x)>\log_{h(x)}g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ h(x)>1. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<h(x)<1. \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$3)\ \log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \longleftrightarrow \begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$4)\ f(\log_a x) > 0 \longleftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x, \\ f(t) > 0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических неравенств с переменным основанием

- **Быстрое избавление от логарифмов**

Пример

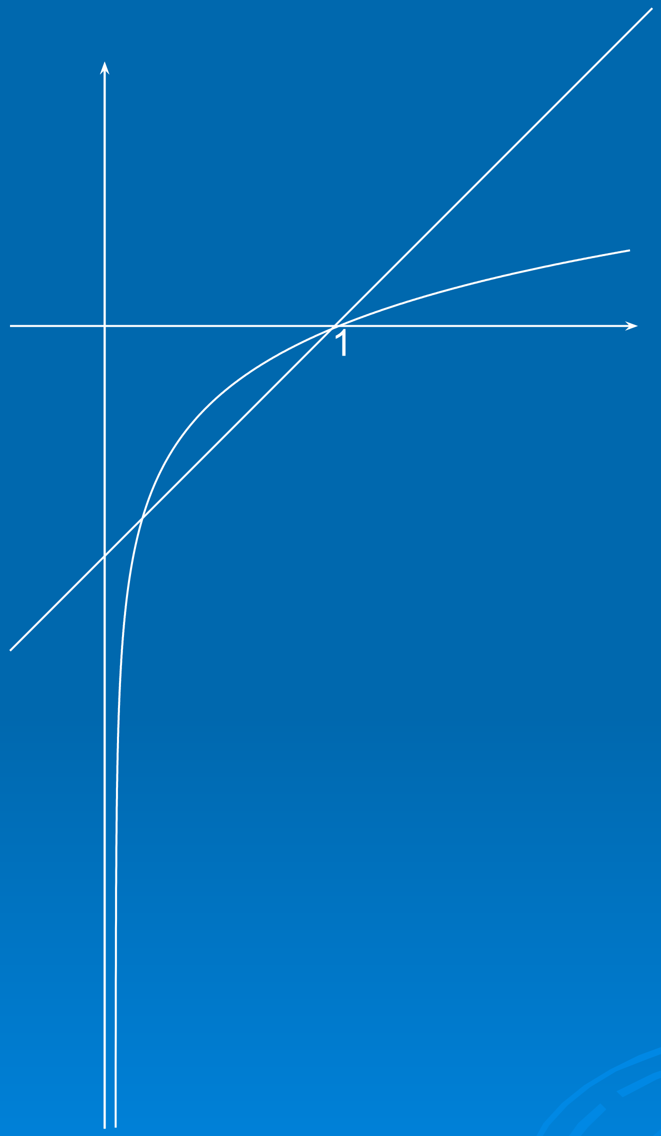
$\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$

Решение

$$\log_{2x}(x^2-5x+6)<1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-5x+6)-\lg 2x}{\lg 2x-\lg 1}<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x^2-5x+6)-2x}{2x-1}<0, \\ x^2-5x+6>0, \\ x>0. \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1/2)\cup(1;2)\cup(3;6)$$

Правило знаков



Очевидно, что lg x, как и $\log_a x$ по любому основанию a > 1, имеет тот же знак, что и число x – 1.
В более общем случае от логарифма по произвольному основанию a можно перейти к основанию 10:

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

Таким образом, знак величины $\log_a x$ совпадает со знаком числа (x – 1)/(a – 1) или (x – 1)(a – 1).

Пример

$\log_{2x}(x-4)\log_{x-1}(6-x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x-5)(x-2)(5-x)<0, \\ x-4>0, \\ 6-x>0, \\ x>0,\ x\neq 1/2, \\ x>1, x-1\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x\in(4;5)\cup(5;6)}$