Иррациональные уравнения

Урок алгебры и начал анализа

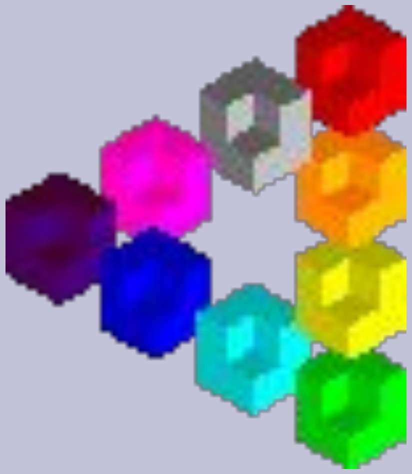
11 класс

Учитель: Вязовченко Н.К.

Цели урока

- Ввести понятие иррациональных уравнений и показать способы их решений.
- Развивать умение выделять главное, существенное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия, развивать самостоятельность, мышление, познавательный интерес.
- Содействовать формированию мировоззренческих понятий.

Устная работа



Устная работа

- Упростить выражение:

$\sqrt{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)^2$; $\sqrt[3]{x^3}$;

$\sqrt[5]{x^{10}}$; $\sqrt{x^8}$; $\sqrt[3]{-x^3}$;

$\sqrt[4]{(-x)^4}$; $\sqrt[5]{x^{10}}$; $\sqrt[3]{x^9}$.

Устная работа

Решите уравнения:

а) $x^4 - 8 = 0;$

б) $x^3 + 4 = 0;$

в) $x^5 - 1 = 0;$

г) $x^8 + 1 = 0;$

д) $x^{10} + 11 = 0.$

"НАЙДИ ОШИБКИ"

Решение уравнений

1) $x^3 = 8$ 2) $x = \sqrt{36}$ 3) $x^3 = -8$ 4) $\sqrt[3]{x} = -3$

$x = \pm 2$ $x = \pm 6$ *нет корней* $x = \pm 27$

Применение формул сокращенного умножения

$$1)\ (x+2)^2 = x^2 - 4x + 4;$$

$$2)\ (3x+2)^2 = 3x^2 + 12x + 4;$$

$$3)\ (2y-4)^2 = 4y - 16y.$$

Тема урока

Иррациональные уравнения

Определение

- **Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.**

Устно:

Какие из следующих уравнений являются иррациональными?

а) $x + \sqrt{x} = 2$

б) $x + \sqrt{x} = 0$

в) $x\sqrt{7} = 11 + x$

г) $y^2 - 3\sqrt{2} = 4$

д) $y + \sqrt{y^2 + 9} = 2$

е) $\sqrt{x - 1} = 3$

Посторонние корни

- Основными причинами появления посторонних корней является возведение обеих частей уравнения в одну и ту же ***чётную*** степень, расширение области определения и др.
- По этим причинам необходимой частью решения иррационального уравнения является ***проверка***, либо использование ***области определения*** заданного уравнения.

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень

1. Преобразовать обе части уравнения к виду

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

2. Возвести обе части в *n-ую* степень

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{g(x)}\right)^n$$

3. Учитывая, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ получаем:

$$f(x) = g(x)$$

4. Решить полученное уравнение и выполнить проверку (или ОДЗ)

Примеры

$$\sqrt[3]{3-x}=2$$

$$\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3=2^3$$

$$3-x=8$$

$$-x=5 \,\Big|\, :(-1)$$

$$x=-5$$

Ответ: $x=-5$

$$\sqrt{-3x+3}-x=-1$$

уединим корень

$$\left(\sqrt{-3x+3}\right)^2=(x-1)^2$$

$$-3x+3=x^2-2x+1$$

$$-x^2-x+2=0 \,\Big|\, :(-1)$$

$$x^2+x-2=0$$

$$Д=1-4\cdot1\cdot(-2)=9$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1=1,\ \ x_2=-2.$$

Проверка: *при* $x=1$

$$\sqrt{-3\cdot1+3}=1-1$$

$0=0$ – *верное равенство*,

$x=1$ *является корнем*;

при $x=-2$

$$\sqrt{-3\cdot(-2)+3}=-2-1$$

$3=-3$ - *неверное равенство*,

$x=-2$ *не является корнем*.

Ответ: $x=1$

Если квадратных корней в иррациональном уравнении много, то приходится возводить в квадрат несколько раз:

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}-4=0$

уединим корень

$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}$

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(4-\sqrt{4x+1}\right)^2$

$2x-3=16-8\sqrt{4x+1}+4x+1$

$2x-3-16-4x-1=-8\sqrt{4x+1}$

$-2x-20=-8\sqrt{4x+1}\,\Big|\,:(-2)$

$x+10=4\sqrt{4x+1}$

$(x+10)^2=\left(4\sqrt{4x+1}\right)^2$

$x^2+20x+100=16(4x+1)$

$x^2+20x+100=64x+16$

$x^2-44x+84=0$, *по т. Виета*

$x_1+x_2=44,\quad x_1\cdot x_2=84,$

$x_1=42,\quad x_2=2.$

Проверка: *при* $x=42$

$\sqrt{2\cdot 42-3}+\sqrt{4\cdot 42+1}-4=0$

$\sqrt{81}+\sqrt{169}-4=0$ — *неверное рав-во*,

$x=42$ *не является корнем*;

при $x=2$

$\sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{4\cdot 2+1}-4=0$

$\sqrt{1}+\sqrt{9}-4=0$ — *верное равенство*,

$x=2$ *является корнем*.

Ответ: $x=2$.

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}-4=0$$

уединим корень

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}$$

$$(\sqrt{2x-3})^2=(4-\sqrt{4x+1})^2$$

$$2x-3=16-8\sqrt{4x+1}+4x+1$$

$$2x-3-16-4x-1=-8\sqrt{4x+1}$$

$$-2x-20=-8\sqrt{4x+1}\ \Big|\ :(-2)$$

$$x+10=4\sqrt{4x+1}$$

$$(x+10)^2=(4\sqrt{4x+1})^2$$

$$x^2+20x+100=16(4x+1)$$

$$x^2+20x+100=64x+16$$

$$x^2-44x+84=0,\ \textit{по т. Виета}$$

$$x_1+x_2=44,\quad x_1\cdot x_2=84,$$

$$x_1=42,\quad x_2=2.$$

Проверка : *при* $x=42$

$$\sqrt{2\cdot 42-3}+\sqrt{4\cdot 42+1}-4=0$$

$\sqrt{81}+\sqrt{169}-4=0$ — *неверное рав — во,*

$x=42$ *не является корнем;*

при $x=2$

$$\sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{4\cdot 2+1}-4=0$$

$\sqrt{1}+\sqrt{9}-4=0$ — *верное равенство,*

$x=2$ *является корнем.*

Ответ : $x=2$.

Проверка

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}-4=0$

уединим корень

$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}$

$(\sqrt{2x-3})^2=(4-\sqrt{4x+1})^2$

$2x-3=16-8\sqrt{4x+1}+4x+1$

$2x-3-16-4x-1=-8\sqrt{4x+1}$

$-2x-20=-8\sqrt{4x+1}\,\big|\,:(-2)$

$x+10=4\sqrt{4x+1}$

$(x+10)^2=(4\sqrt{4x+1})^2$

$x^2+20x+100=16(4x+1)$

$x^2+20x+100=64x+16$

$x^2-44x+84=0$, *по т. Виета*

$x_1+x_2=44,\quad x_1\cdot x_2=84,$

$x_1=42,\quad x_2=2.$

Проверка: *при* $x=42$

$\sqrt{2\cdot 42-3}+\sqrt{4\cdot 42+1}-4=0$

$\sqrt{81}+\sqrt{169}-4=0$ – *неверное рав – во*,

$x=42$ *не является корнем*,

при $x=2$

$\sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{4\cdot 2+1}-4=0$

$\sqrt{1}+\sqrt{9}-4=0$ – *верное равенство*,

$x=2$ *является корнем*.

Ответ: $x=2$.

Метод замены переменной

1. Ввести новую переменную
2. Решить уравнение, отбросить посторонние корни
3. Вернуться к первоначальному неизвестному

- Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения.
- Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал.
- При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример

$$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33, x\in R.$$

Пусть $y=\sqrt{2x^2+3x+9}, y\ge 0,$

тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^2+y-42=0$$

$y_1 = -7$, $y_2 = 6$

Решая уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$$

получим:

$x = 3$ $\quad$ $x = -4,5.$

Ответ: x = 3; x = - 4,5

- В некоторых случаях можно сделать вывод о решении иррационального уравнения, не прибегая к преобразованиям.
- Например, уравнения

$$\sqrt{5x-2}=-1$$

$$\sqrt[4]{x-5}=3-x$$

не имеют решения.

Метод пристального взгляда

Этот метод основан на следующем теоретическом положении: “Если функция $y = f(x)$ возрастает в области определения и число входит в множество значений, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.”

Для реализации метода, основанного на этом утверждении требуется:

- Выделить функцию, которая фигурирует в уравнении.
- Записать область определения данной функции.
- Доказать ее монотонность в области определения.
- Угадать корень уравнения.
- Обосновать, что других корней нет.
- Записать ответ.

Пример 1

$$\sqrt{x-10}+\sqrt{3-x}=2$$

Наличие радикалов четной степени говорит о том,
что подкоренные выражения должны быть неотрицательными.
Поэтому сначала найдем область допустимых значение переменной ***x***

$$\begin{cases} x-10\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 10 \\ x\leq 3 \end{cases}$$

Очевидно, что левая часть уравнения не существует ни при одном значении неизвестного ***x***. Таким образом, вопрос о решении уравнения снимается – ведь нельзя же осуществить операцию сложения в левой части уравнения, так как не существует сама сумма. Каков же вывод? Уравнение не может иметь решений, так как левая часть не существует ни при одном значении неизвестного ***x***.

Пример 2

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$$

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$

Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ x+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -3$$

Данная функция является монотонно возрастающей.

Для $x \in [-3; \infty)$ эта функция будет принимать наименьшее значение при $x = -3$, а далее только возрастать.

$$f(-3) = \sqrt{5} \approx 2,23$$

Число 5 принадлежит области значения, следовательно, согласно утверждению $x = 1$.

Проверкой убеждаемся, что это действительный корень уравнения..

Решение упражнений

№ 417 (а, б),

418 (а, б),

№ 419 (а, б),

422 (а, б)

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

п. 33

№ 417 (в, г),

418 (в, г)

№ 419 (в, г),

422 (в, г)