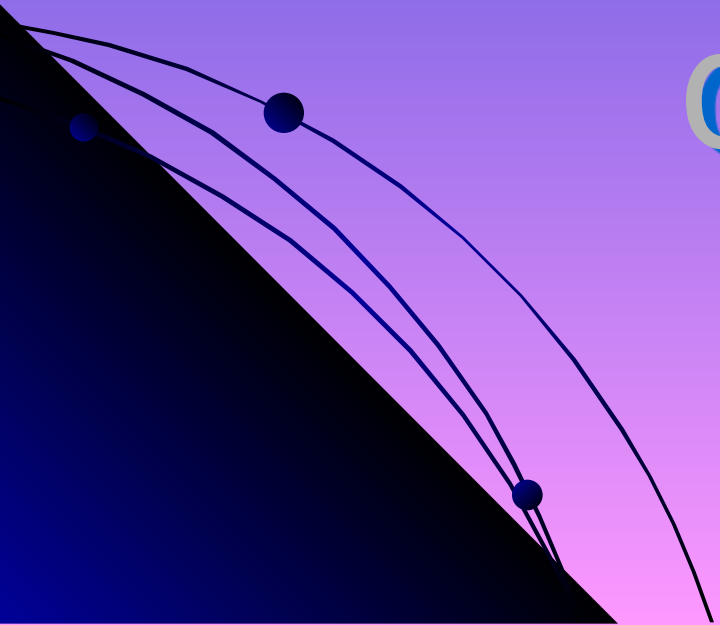


Применения производной к исследованию функций



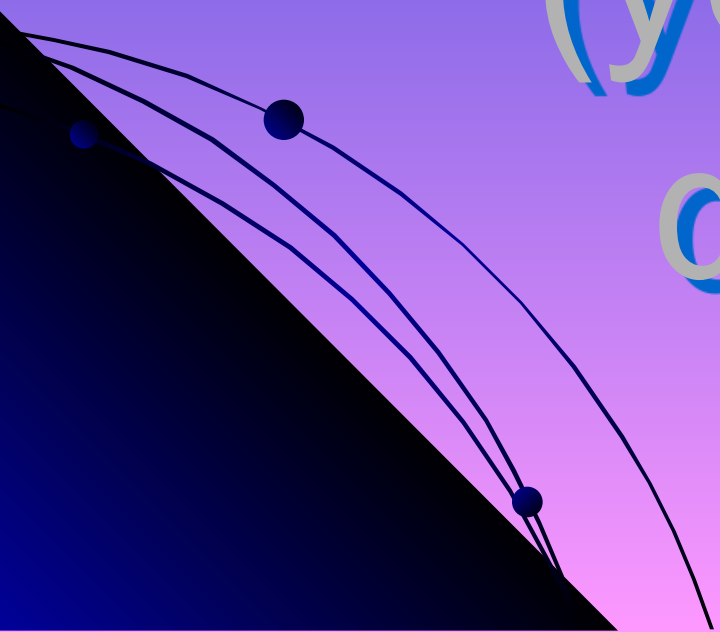
Оглавление

- **Схема исследования функций;**
- **Признак возрастания (убывания) функции:**
 - Достаточный признак возрастания функции;
 - Достаточный признак убывания функции;
- **Критические точки функции:**
 - Необходимое условие экстремума;
 - Признак максимума функции;
 - Признак минимума функции.

Схема исследования функций

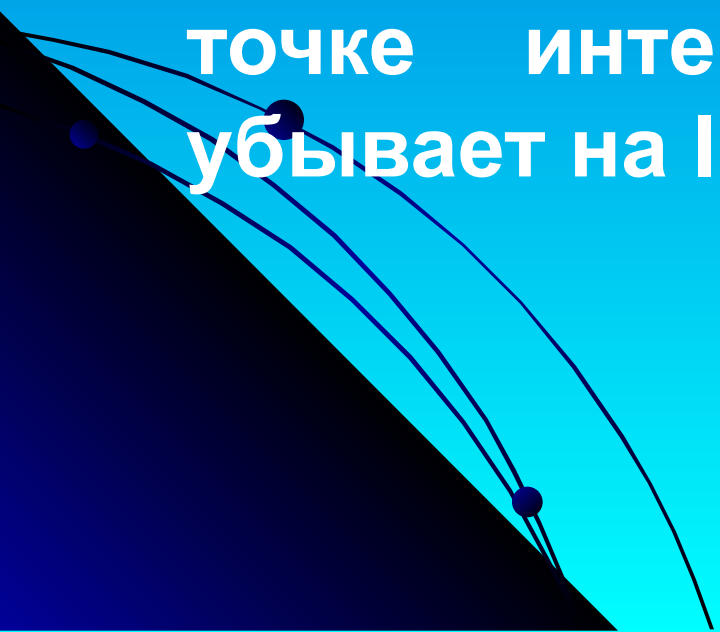
- Найти области определения и значений данной функции f .
- Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование.
- Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Найти промежутки знакопостоянства функции f .
- Выяснить, на каких промежутках функция f возрастает, а на каких убывает.
- Найти точки и вид экстремума и вычислить значения f в этих точках.
- Исследовать поведение функции f в окрестности характерных точек, не входящих в область определения.

Признак возрастания (убывания) функции



Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то функция возрастает на I .

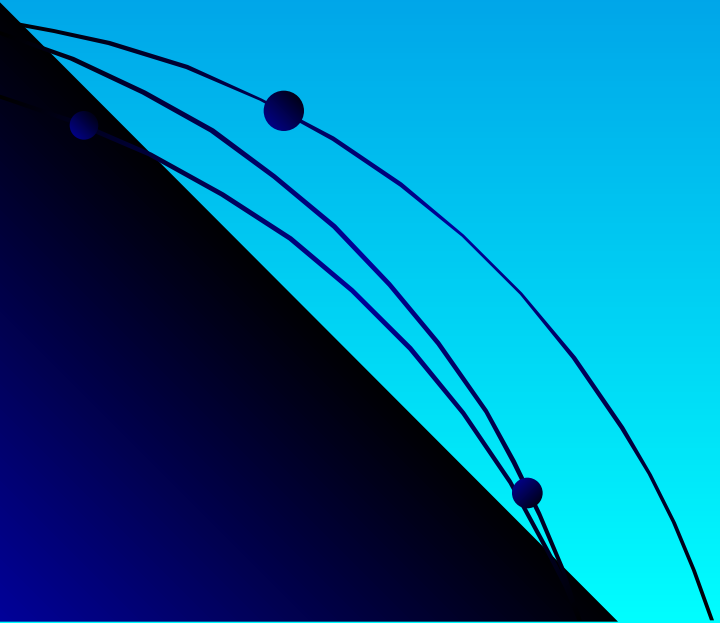
Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I , то функция убывает на I .



Доказательство признака возрастания (убывания) функции

Доказательство проводится на основании
формулы Лагранжа:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Пример нахождения промежутков возрастания (убывания) функции

Дано:

$$f(x) = -2x + \sin x$$

Найти:

промежутки возрастания
(убывания) функции

Решение

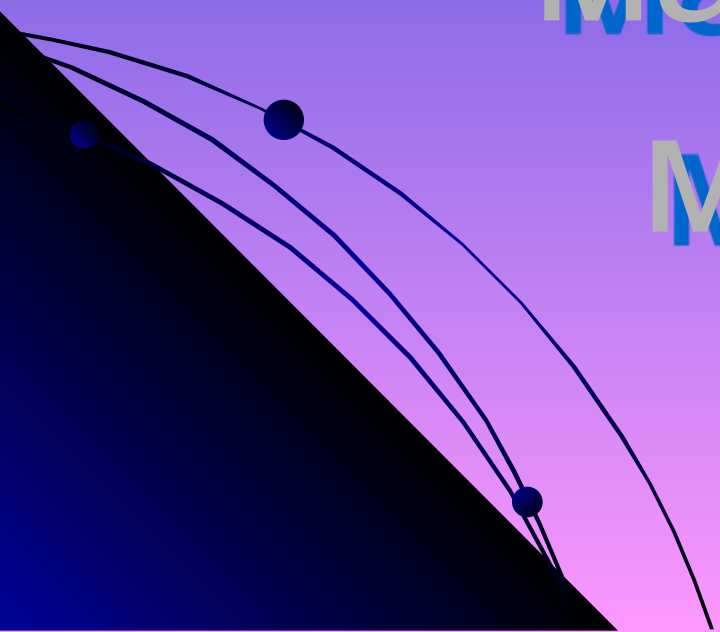
Функция определена на всей числовой прямой.

Найдем $f'(x)$. $f'(x) = -2 + \cos x$.

$|\cos x| \leq 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ для всех действительных x .

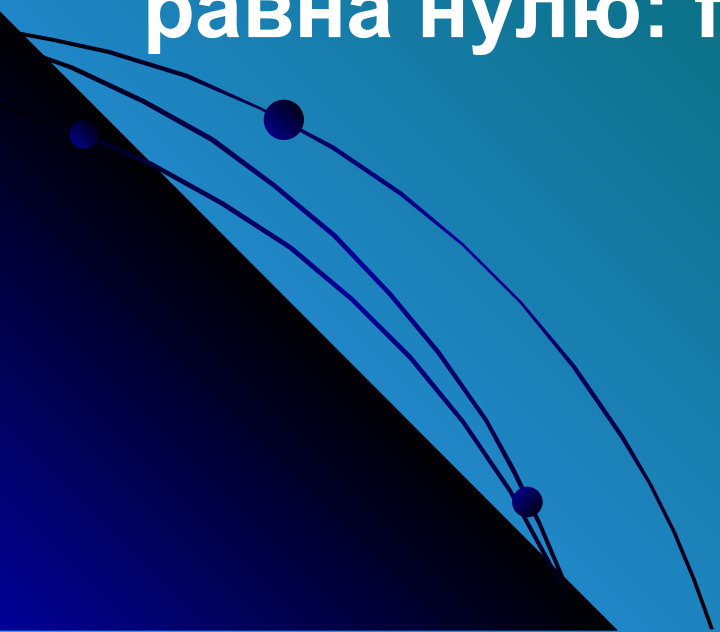
Вывод: $f(x) = -2x + \sin x$ убывает на всей числовой прямой

Критические точки функции, максимумы и минимумы

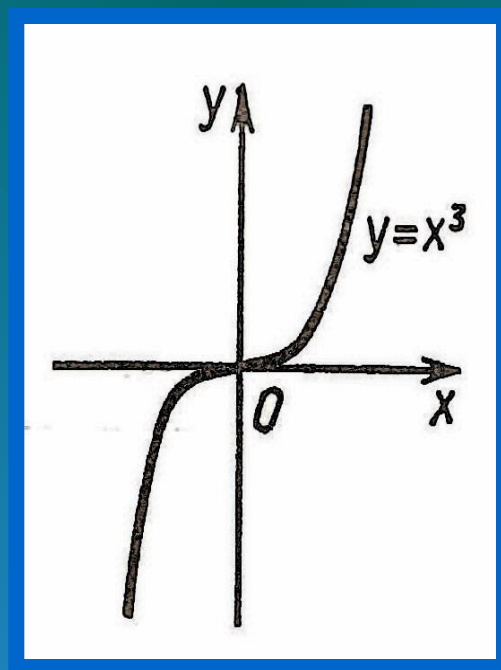


Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)

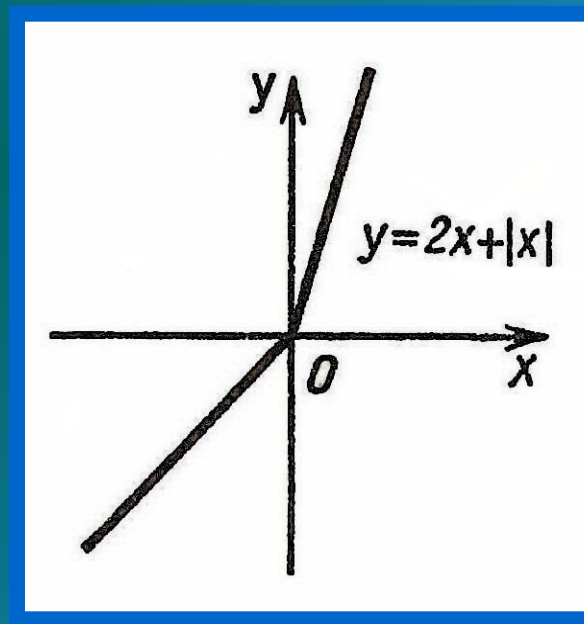
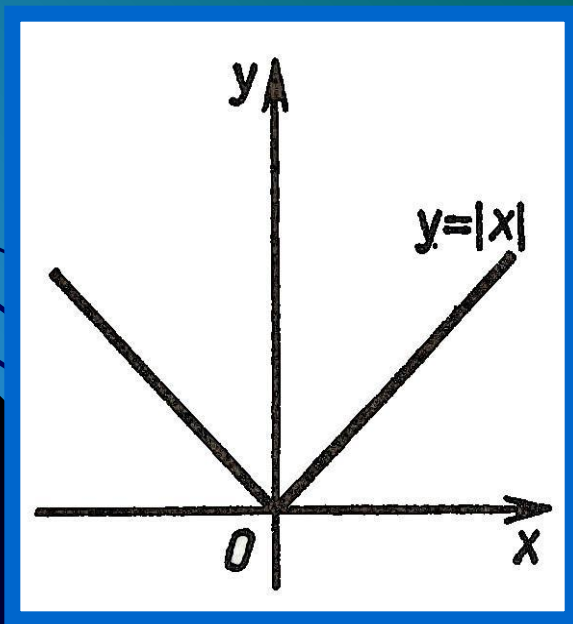
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f' , то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$



Теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума. Из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.



Примеры критических точек, в которых производная не существует



Признак максимума функции

Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f .

- Упрощённая формулировка признака:

Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции

Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f .

- Упрощённая формулировка признака:

Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка максимума.

Пример нахождения точек экстремума функции

Дано:

$$f(x) = 3x - x^3$$

Найти:

Точки экстремума функции

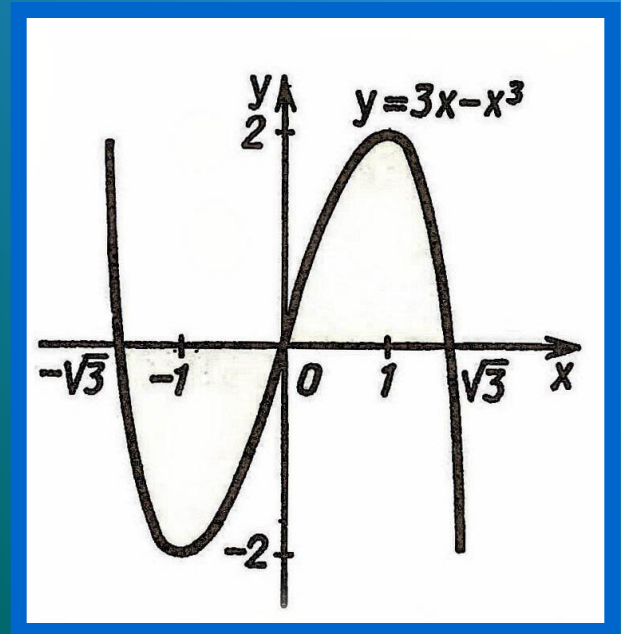
Решение

Найдём производную функции: $f'(x) = 3 - 3x^2$

$$f'(x) = 0, \text{ при } x = 1 \text{ и } x = -1$$

$f'(x) < 0$ при $x < -1$; $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 1$, т.е. в точках -1 и 1 функция меняет знак.

По признакам максимума и минимума точка -1 является точкой минимума, а точка 1 — точкой максимума.



Проект выполняла Сергеева
Вероника, ученица 11 класса,
с использованием следующих
материалов:

- Алгебра и начала анализа. Учебник для
10-11 классов средней школы.
- 