

Областное государственное автономное образовательное
учреждение
среднего профессионального образования
Белгородский строительный колледж
г. Белгород

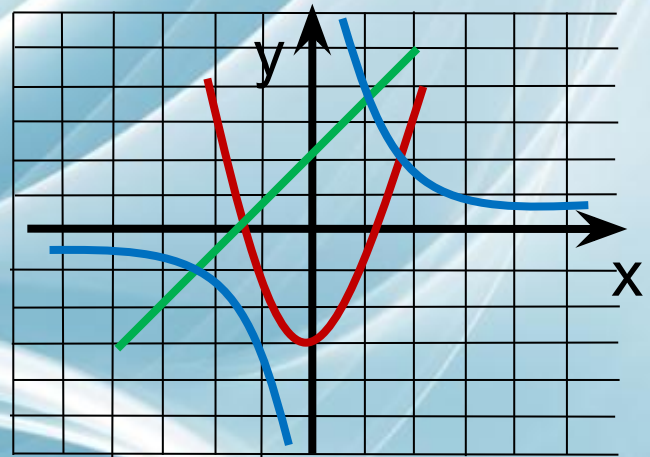
Урок-лекция «Применение производной к исследованию и построению графиков функций»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна,
преподаватель математики

Цель урока:

- научиться применять таблицу производных при исследовании функций и построении графиков



Математический диктант

Вариант 1.

1. $(Cu)' = \dots$
2. $\dots = (u'v - v'u)/v^2$
3. $(\cos x)' = \dots$
4. $\dots = 1/\cos^2 x$
5. $(e^x)' = \dots$

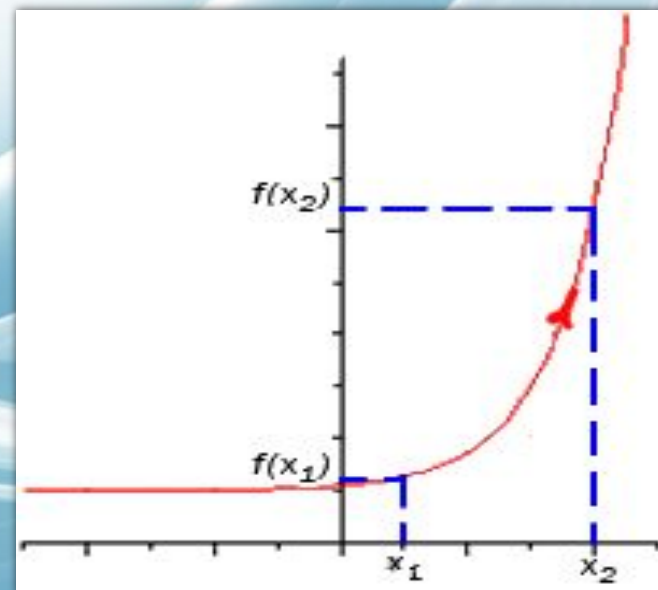
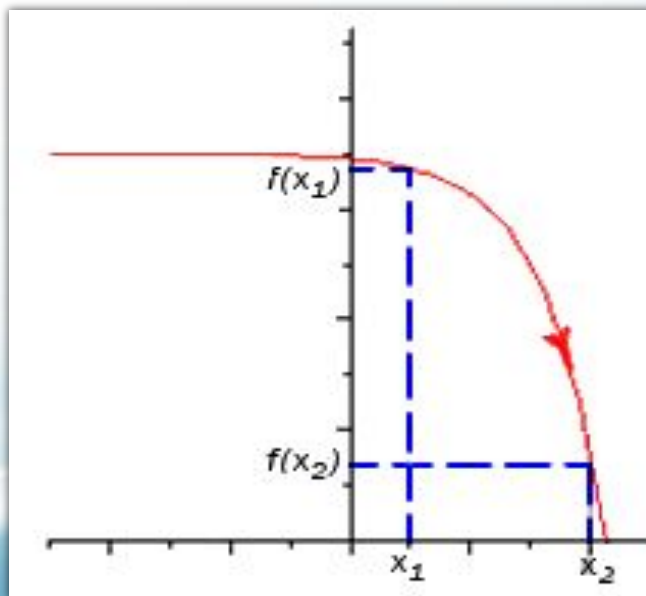
Вариант 2.

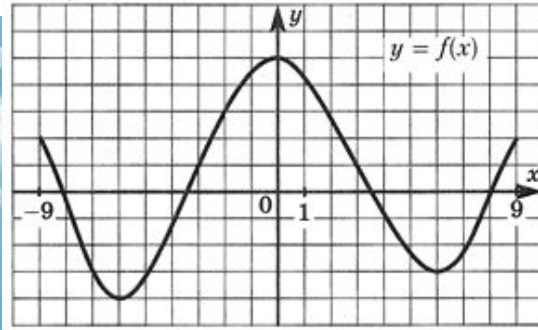
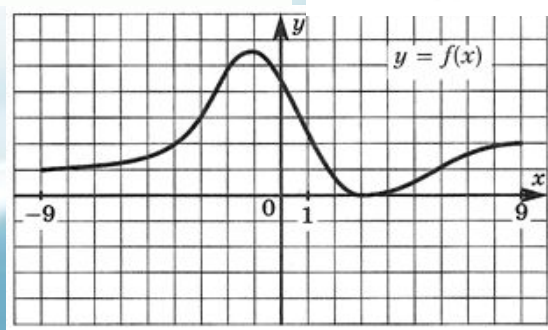
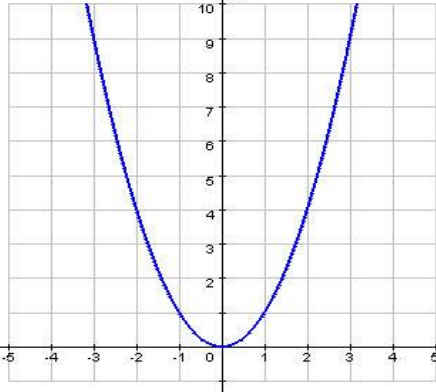
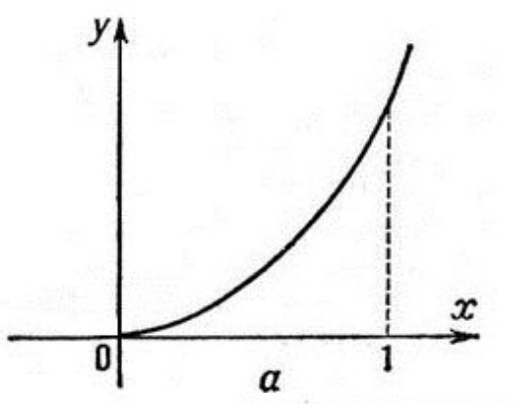
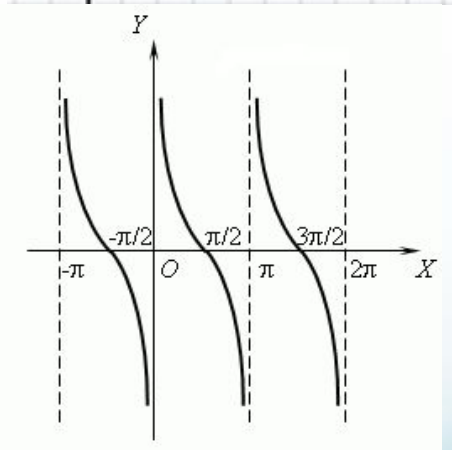
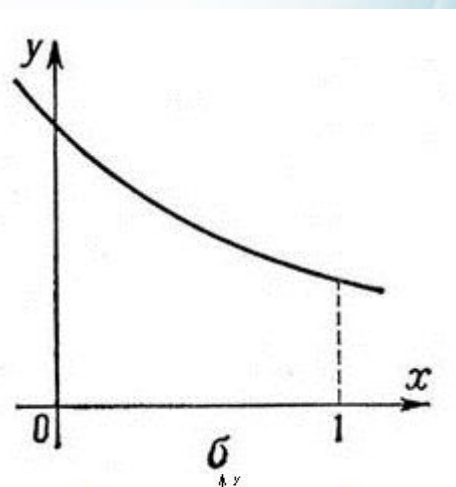
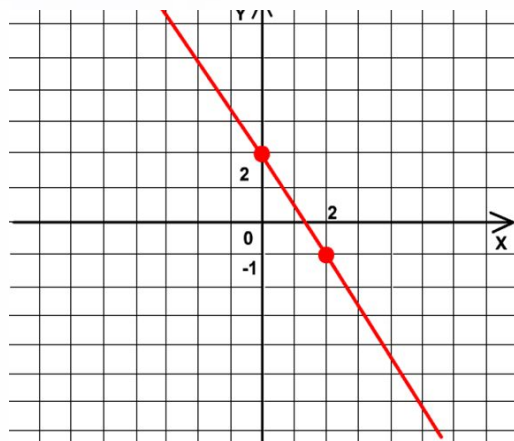
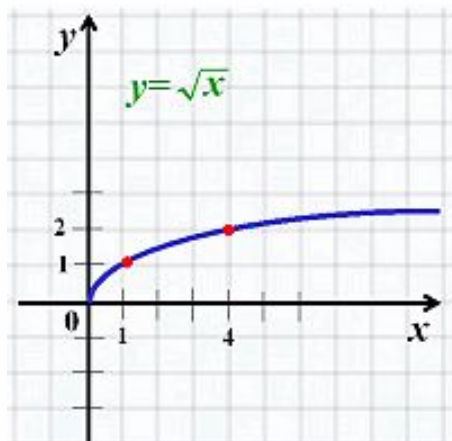
1. $C' = \dots$
2. $\dots = (u'v + v'u)$
3. $(\sin x)' = \dots$
4. $\dots = -1/\sin^2 x$
5. $(x^n)' = \dots$

Классная работа

- Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение **промежутков монотонности функции** (**промежутков возрастания и убывания**). Такой анализ легко сделать с помощью производной.

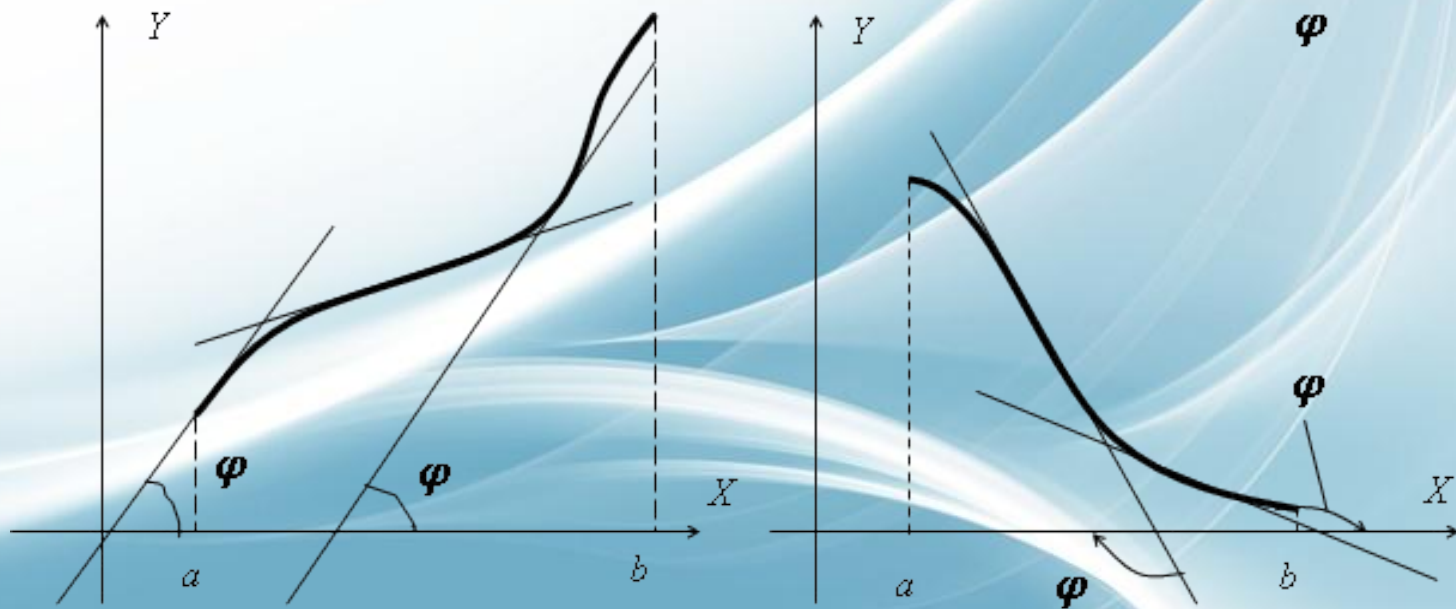
- Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.





Теорема 1.

- Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ **возрастает (убывает)** в данном интервале, то производная этой функции **не отрицательна (не положительна)** в этом интервале.



Теорема 2.

- Если производная функции $y=f(x)$ **положительна (отрицательна)** на некотором интервале, то функция в этом интервале **монотонно возрастает (монотонно убывает)**.



Правило нахождения интервалов монотонности

1. Находим область определения функции $f(x)$.
2. Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции.
3. Находим точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует. Эти точки называются **критическими** для функции $f(x)$.
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы. Они являются **интервалами монотонности**.
5. Исследуем знак $f'(x)$ на каждом интервале. Если **$f'(x) > 0$** , то на этом интервале **$f(x)$ возрастает**; если **$f'(x) < 0$** , то на таком интервале функция **$f(x)$ убывает**.

Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

1. **Область определения:** $\mathbb{R}$. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную:** $y'=6x^2-6x-36$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

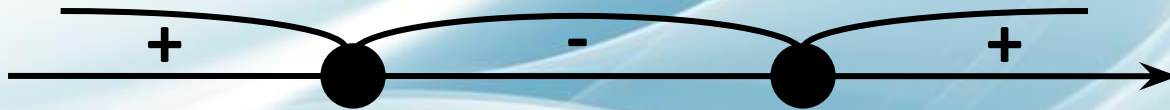
$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



5. Функция **возрастает** при $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$, функция **убывает** при $x \in [-2; 3]$.

Пример №2. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$

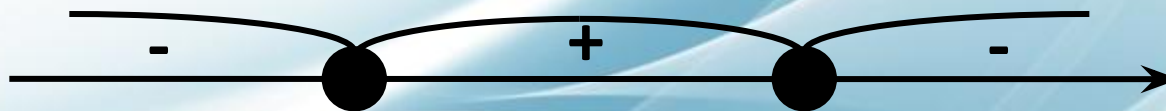
1. Область определения: $\mathbb{R}$. Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную: $y'=3x^2-6x$.
3. Находим критические точки: $y'=0$.

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x_1=0 \text{ и } x_2=2$$

4. Делим область определения на интервалы:

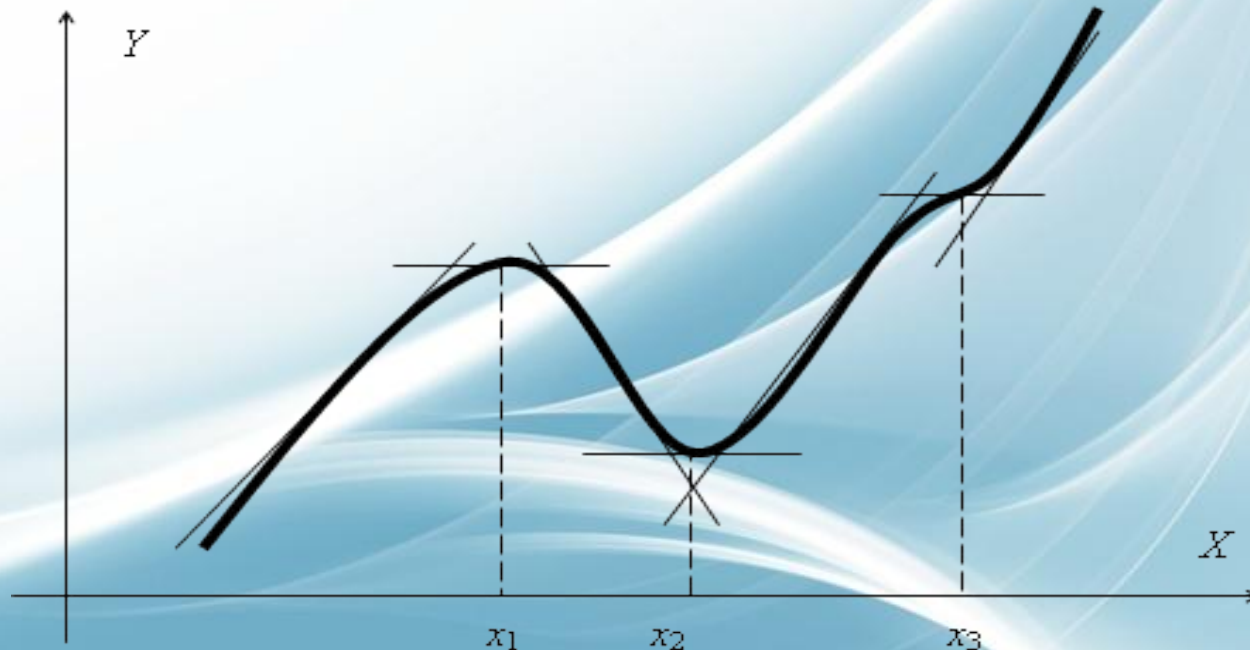


5. Функция **возрастает** при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, функция **убывает** при $x \in [0; 2]$.

- Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.
- Точку $x=x_0$ называют **точкой максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Теорема 3.

- Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке **производная** функции или **равна нулю**, или **не существует**.



Теорема 4.

- Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 **меняет знак**, то точка x_0 **является точкой экстремума** функции $f(x)$.

Если производная меняет знак с $+$ на $-$, то точка будет являться точкой максимума, если с $-$ на $+$, то точка будет точкой



Пример №3. Найти экстремумы функции

$$y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$$

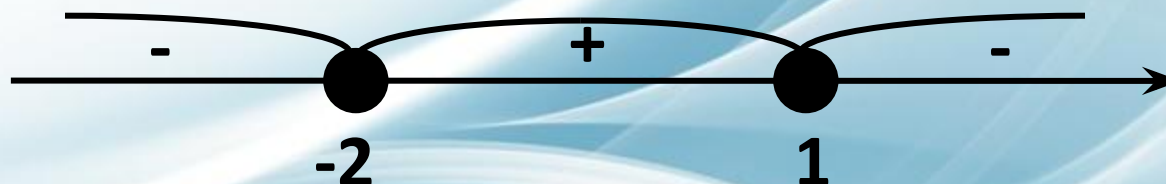
1. Область определения: $\mathbb{R}$. Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную: $y' = -6x^2 - 6x + 12$.
3. Находим критические точки: $y' = 0$.

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

4. Делим область определения на интервалы:



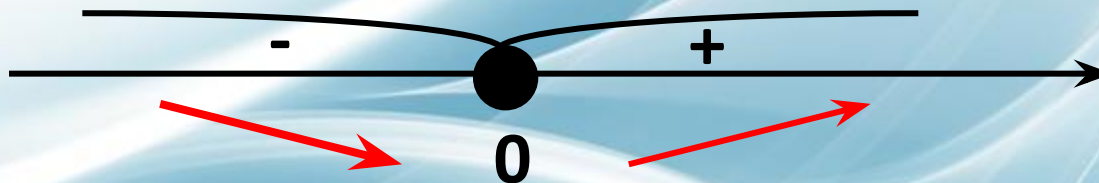
5. $x = -2$ – точка минимума. Найдём минимум функции $y_{\min} = -24$. $x = 1$ – точка максимума. Найдём максимум функции: $y_{\max} = 3$.

Работа на уроке:

- № 564. Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:

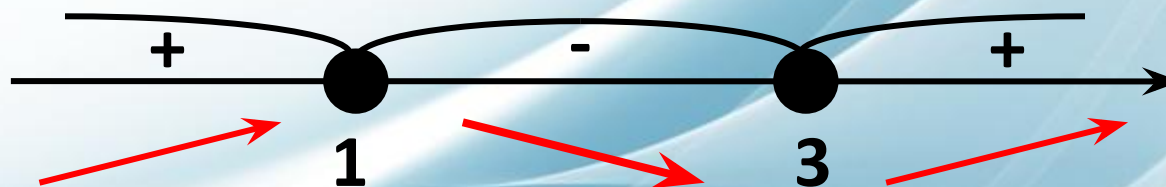


5. $x=0$ – точка минимума. Найдём минимум функции $y_{\min}=2$.

- № 565. Исследовать на экстремум функцию $y=1/3x^3-2x^2+3x+1$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$.
2. Находим производную: $y'=(1/3x^3-2x^2+3x+1)'=x^2-4x+3$.
3. Приравниваем её к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ – критические точки.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=1$ – точка максимума. Найдём максимум функции $y_{\max}=7/3$. $x=3$ – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{\min}=1$.

- № 566. Исследовать на экстремум функцию $y=x^3+3x^2+9x-6$.

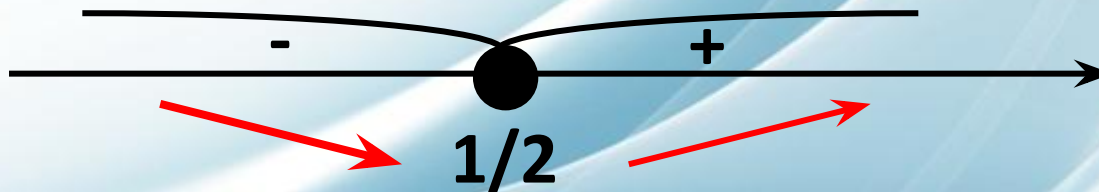
Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$.
2. Находим производную: $y'=(x^3+3x^2+9x-6)'=3x^2+6x+9$.
3. Приравниваем её к нулю: $3x^2+6x+9=0$, откуда $D<0$. То есть критических точек не существует.
4. Однако, функция возрастает на всей $D(y)$, так как $y'=3x^2+6x+9 > 0$:

- № 571. Исследовать на экстремум функцию $y=x^2-x-6$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$.
2. Находим производную: $y'=(x^2-x-6)'=2x-1$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x-1=0$, откуда $x=1/2$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=1/2$ – точка минимума. Найдём минимум функции:
 $y_{\min}=-6,25$.

Задание на дом:

1. Учебник Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л.: № 572, 573, 575, 576 – стр. 253;
2. Выучить достаточные и необходимые условия монотонности и существования экстремумов функции.