



Применение производной к исследованию функций

2 курс

**Теория без практики мертва или
бесплодна, практика без теории
невозможна или пагубна.**

**Для теории нужны знания,
для практики,
сверх всего того,
и умение.**



А.Н. Крылов

**(Русский советский математик,
кораблестроитель, академик)**

Математическим выражением взаимной связи реальных величин является идея функциональной зависимости. Понятие функции – важнейшее понятие математики. Слово «функция» (от латинского «Functio» - исполнение обязанностей, деятельность) впервые ввел немецкий ученый Г. Лейбниц.



Исследование функции:

- $D(f)$
- $E(f)$
- промежутки возрастания и убывания
- четность и т.п....



Повторение

- Четность, нечетность функций
- Периодичность
- Нули функции
- Промежутки знакопостоянства
- Монотонность функции

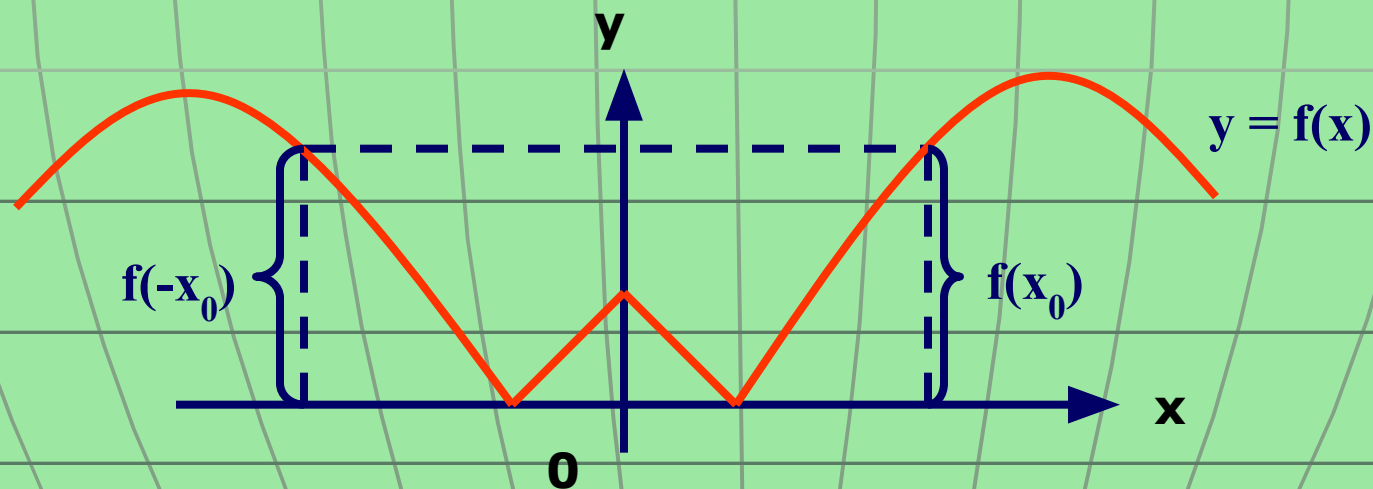


Четность функций

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство **$f(-x) = f(x)$**

четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции **симметричен** относительно **оси ординат**

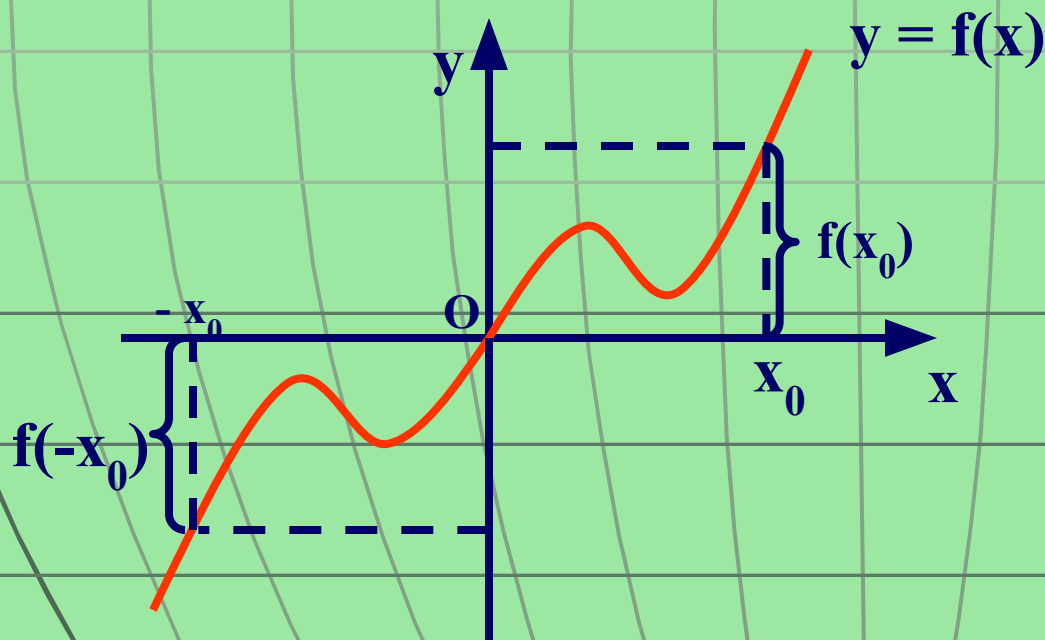


Нечетность функций

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение

$(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство **$f(-x) = -f(x)$**

График **нечетной** функции симметричен относительно **начала координат**

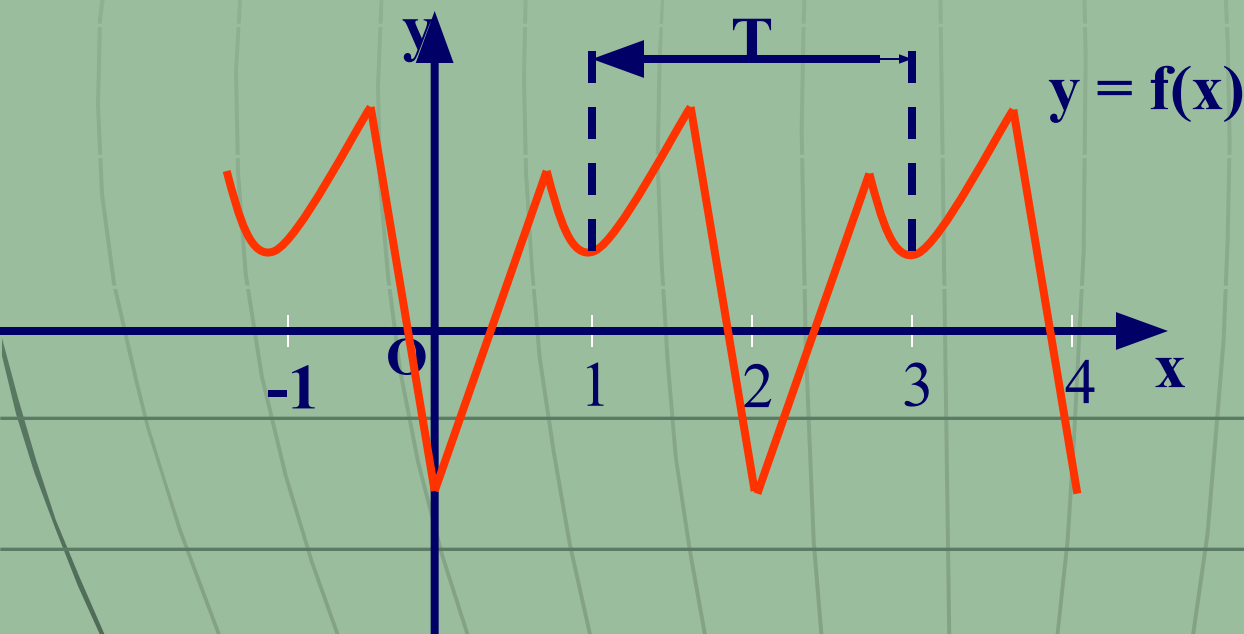


повторение

Периодичность функций

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x , взятого из области определения, значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$$



повторение

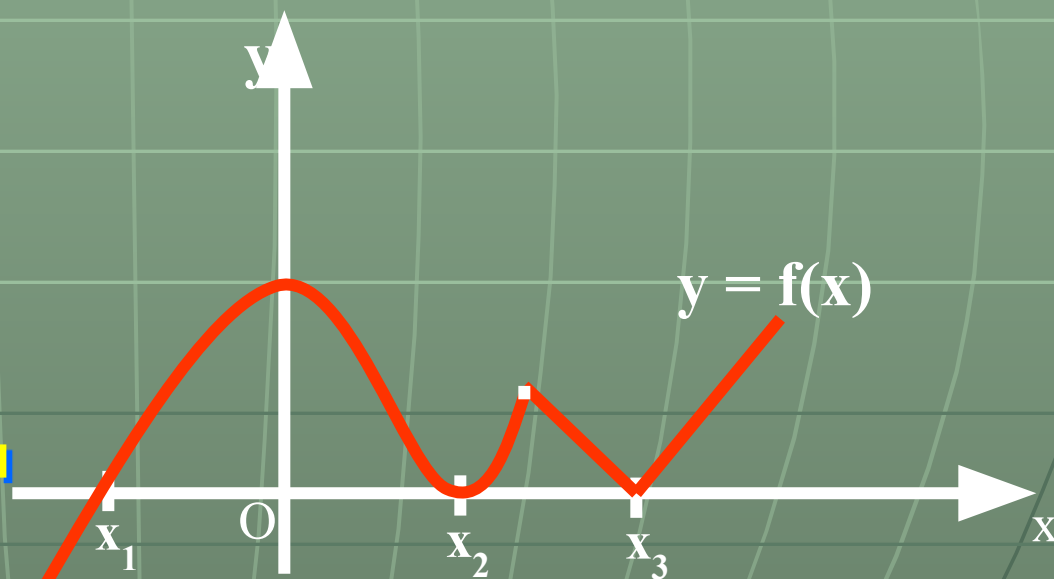
Нули функции

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x , при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$.

повторение

Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее, либо имеет общую точку с этой осью, ординаты данных точек нулевые.

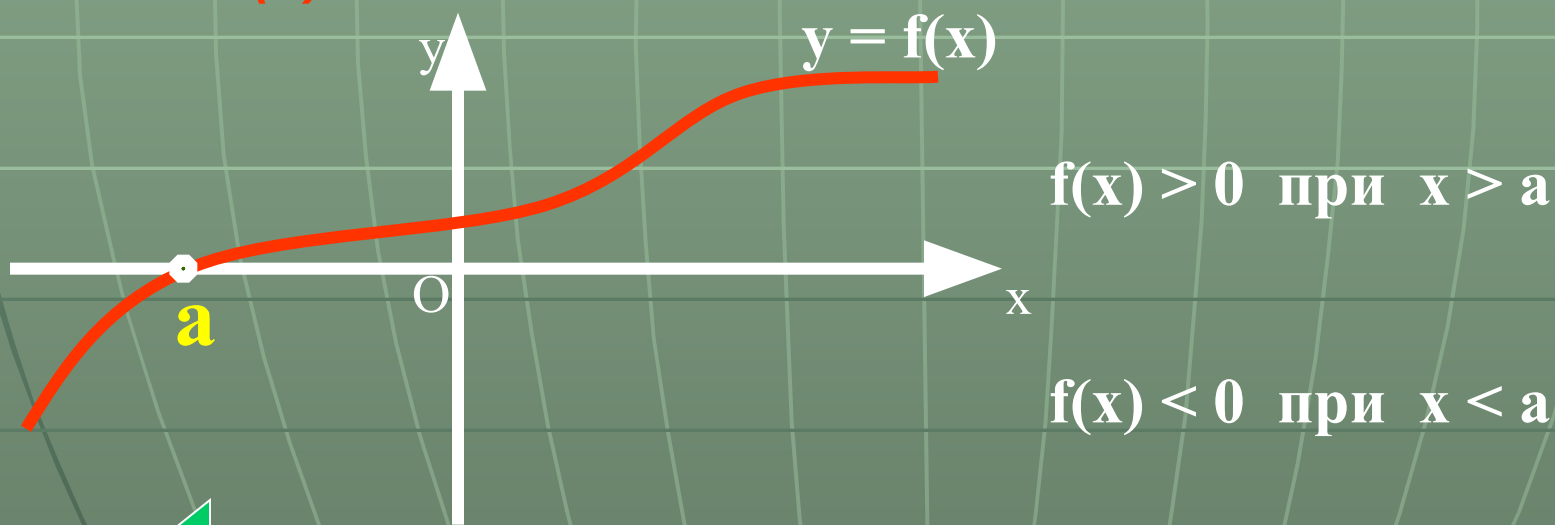


x_1, x_2, x_3 – нули функции $y = f(x)$.

Промежутки знакопостоянства

Определение: Числовые промежутки, на которых непрерывная функция **сохраняет** свой знак и **не обращается в нуль**, называются промежутками знакопостоянства.

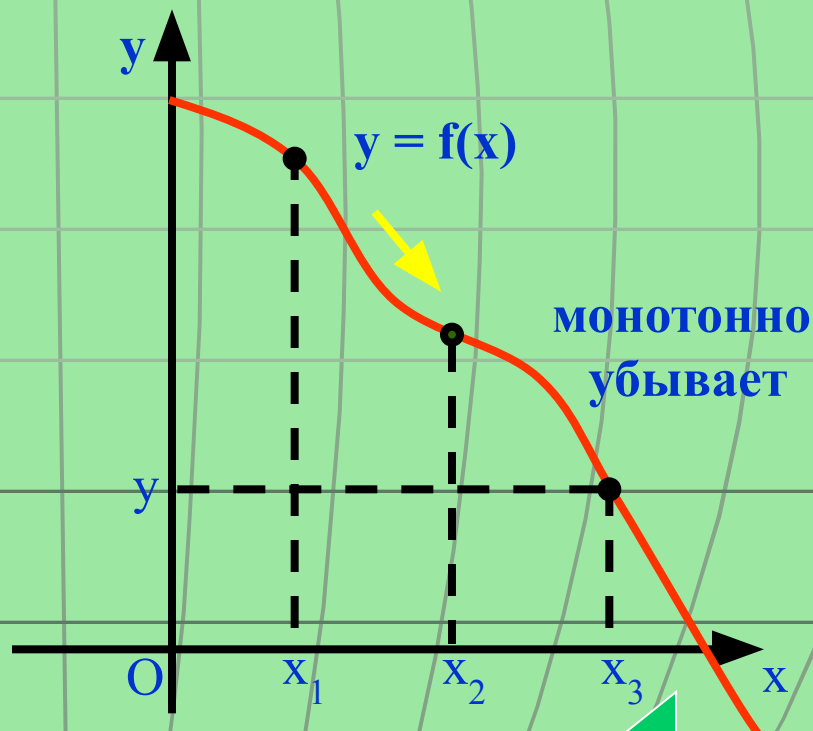
Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если $f(x) > 0$, и ниже оси абсцисс, если $f(x) < 0$



повторение

Монотонность функции

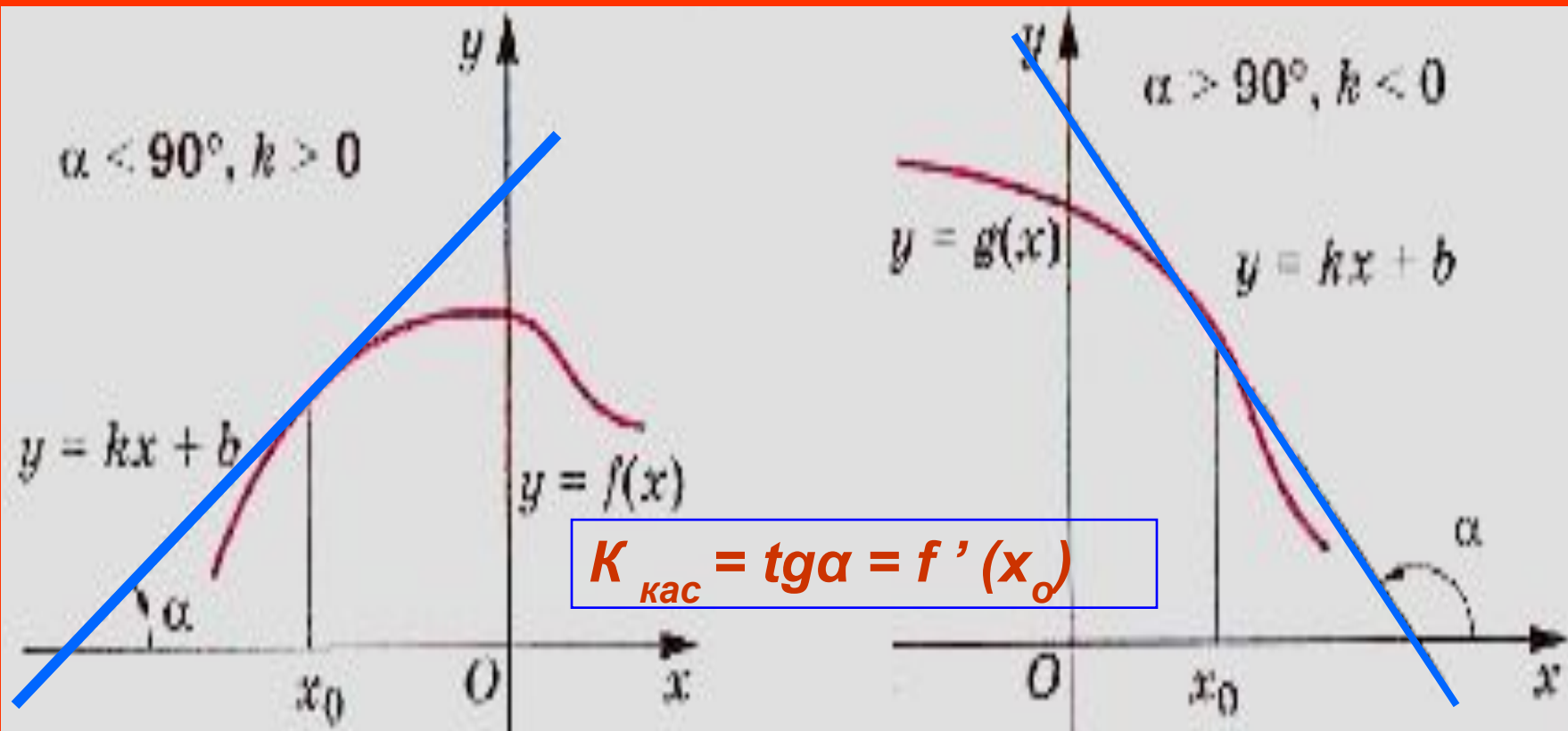
Определение: Функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается, и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается.



повторение

Связь производной с монотонностью функции

- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **положительна**, то функция на этом промежутке **возрастает**, т.
 $f'(x) > 0, f(x)$ □
- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **отрицательна**, то функция на этом промежутке **убывает**, т.
 $f'(x) < 0, f(x)$ □
- Если **производная** функции в каждой точке некоторого промежутка **равна 0**, то функция на этом промежутке **постоянна**



$f'(x) > 0$

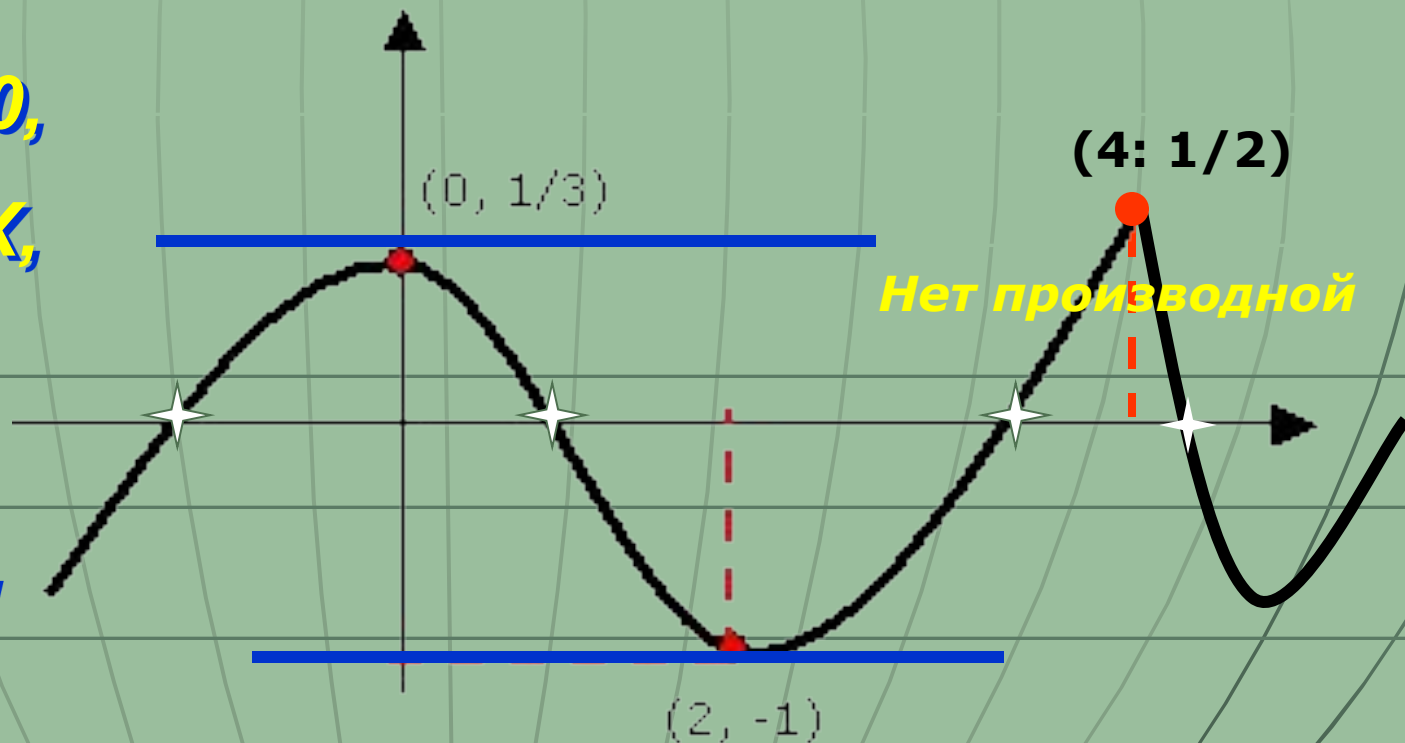
$f'(x) < 0$

Критические точки функции -

Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует

$$f'(x_i) = k_{\text{кас}} = 0,$$

касат || ОХ,
перегиб
графика,
смена
поведения



Достаточный признак возрастания или убывания функции

Пример: Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-3x^2+2$

Решение:

1) $f'(x)=(x^3-3x^2+2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$

2) Находим критические точки: $f'(x)=0$, т.е.

$3x(x-2)=0$ при $x=0$ $x=2$

3) Исследуем знак производной методом интервалов

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Ответ: $f(x) \square$ на $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

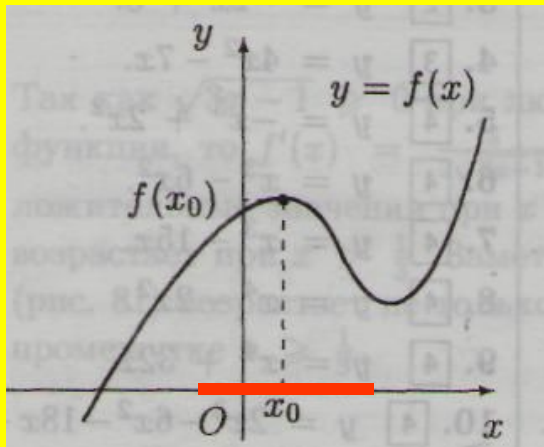
$f(x) \square$ на $(0; 2)$

**критически
точки**

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Окрестностью точки x_0 - называется промежуток, для которого точка x_0 является внутренней.

Точка x_0 называется точкой максимума ($x_{\max}$) функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

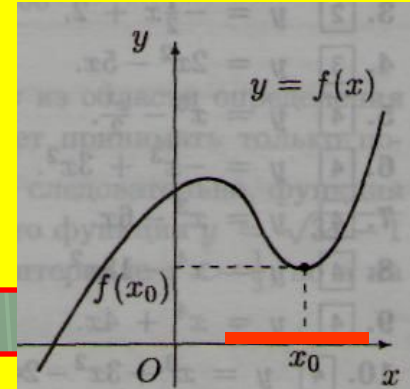


$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_{\max})$$

Точка x_1 называется точкой минимума ($x_{\min}$) функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_1) \quad f(x) \geq f(x_{\min})$$

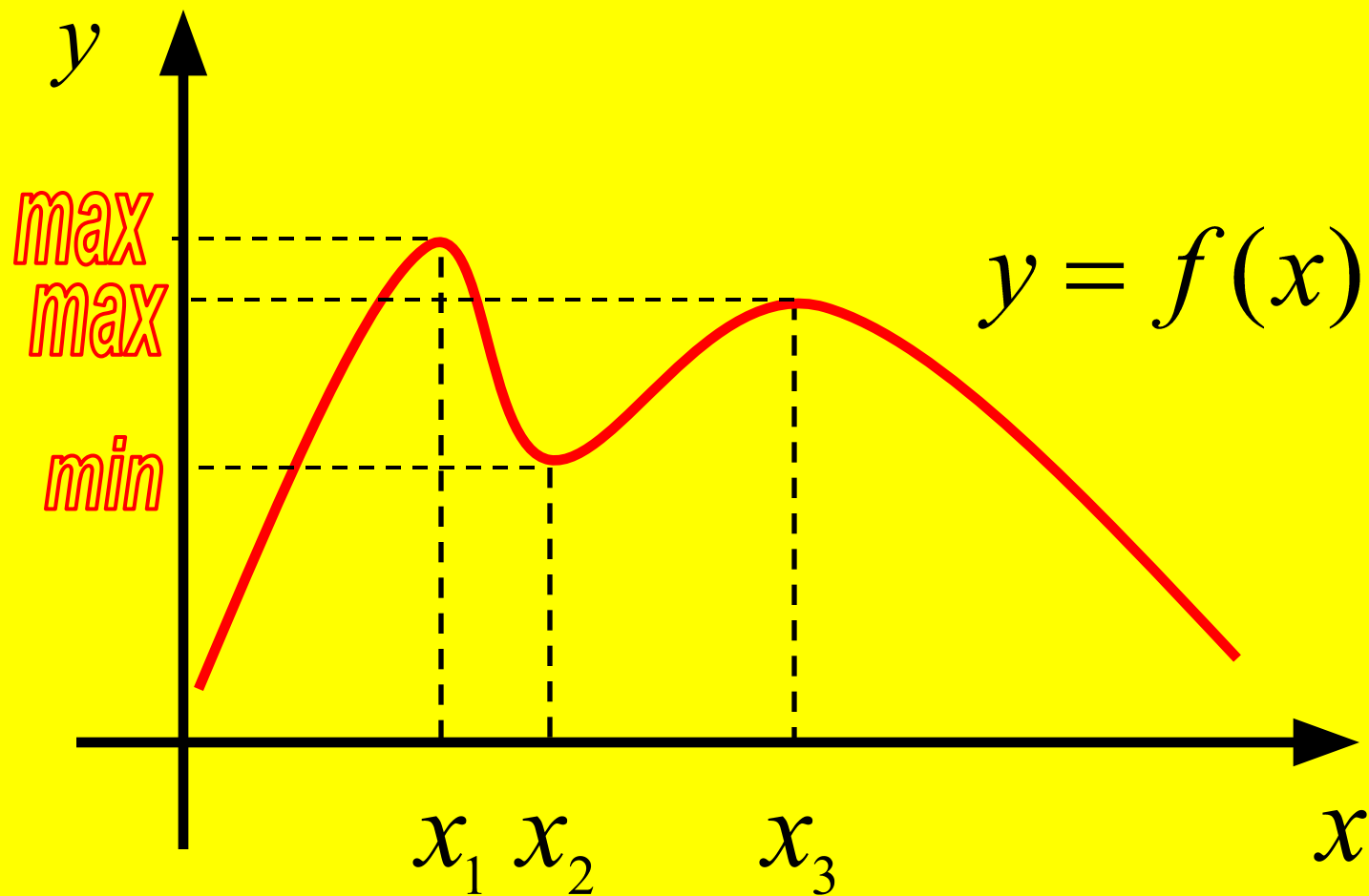


Точки минимума и максимума называются точками экстремума (крайние, конечные)

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно

максимумом и минимумом функции ($y_{\min}$ и $y_{\max}$)

Максимум и минимум функции называется экстремумом функции



Точки экстремумов x_i

Обратите внимание!!!

- *Что происходит с производной при переходе через экстремальную точку?*
- *Что происходит с самой функцией при переходе через экстремальную точку?*

удачи в изучении //

