Приближенные формулы в схеме Бернулли

Локальная формула Муавра-Лапласа

- Если $npq \geq 10$, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $$p \neq 0; \mathrm{p} \neq 1; p \to 0{,}5; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Четная $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2. При $x \geq 5, \varphi(x) \to 0$

Формула Пуассона

- Если $npq < 10$ и $p < 0{,}1$, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$

Интегральная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства функции Лапласа $\Phi(x)$

1. Нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. Возрастающая.

3. При $x \geq 5, \Phi(x) \to \frac{1}{2}$

Таблицы значений

- Функции $\varphi(x)$ http://natalymath.narod.ru/plotnost_norm_rasp.html

- Распределения Пуассона

http://natalymath.narod.ru/puasson.html

- Функции $\Phi(x)$

http://natalymath.narod.ru/laplas.html

Задача 1

- Известно, 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет:
- а) 70 человек,
- б) от 65 до 90 человек.

Решение

а) $$npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16 \geq 10$$

Применяем локальную формулу Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$$

$$P_{100}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}0044$$

Решение

- б) Применяем интегральную формулу Муавра - Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{65 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-15}{4} = -3{,}75,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$P_{100}(65 \le k \le 90) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-3{,}75) \approx 0{,}49379 + 0{,}49991 \approx 0{,}9937$$

Задача 2

- Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми:
- а) три изделия,
- Б)не более двух,
- В) не менее двух

Решение

$$npq = 200 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 0{,}995 < 10$$

$$p < 0{,}1$$

Применяем формулу Пуассона, где $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}005 = 1$

а) при k=3:

$$P_{200}(3) \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$

б) при $k \le 2$ $\quad P_{200}(0 \le k \le 2) \approx P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx$

$$\approx \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} + \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}\left(1 + 1 + 0{,}5\right) \approx 0{,}93$$

в) при $k \ge 2$ $\quad P_{200}(2 \le k \le 200) = 1 - P_{200}(0 \le k \le 1) = 1 - P_{200}(0) - P_{200}(1) \approx$

$$\approx 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1\right) \approx 0{,}26$$