Приближенные числа

Лекция 1

Погрешнсти

1. Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A *по недостатку*; если же $a > A$, то — *по избытку*. Например, для $\sqrt{2}$ число 1,41 будет приближенным значением по недостатку, а 1,42 — по избытку, так как $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Если a есть приближенное значение числа A, то пишут $a \approx A$.

Под *ошибкой* или *погрешностью* Δa приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т. е.

$$\Delta a = A - a\text{*)}.$$

Если $A > a$, то ошибка положительна: $\Delta a > 0$; если же $A < a$, то ошибка отрицательна: $\Delta a < 0$. Чтобы получить точное число A, нужно к приближенному числу a прибавить его ошибку Δa, т. е.

$$A = a + \Delta a.$$

Таким образом, точное число можно рассматривать как приближенное с ошибкой, равной нулю.

Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться *абсолютной погрешностью приближенного числа*

$$\Delta = |\Delta a|.$$

Погрешнсти

О п р е д е л е н и е 1. *Абсолютной погрешностью* Δ приближенного числа a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом A и числом a, т. е.

$$\Delta = |A - a|. \tag{1}$$

Здесь следует различать два случая:

1) число A нам известно, тогда абсолютная погрешность Δ легко определяется по формуле (1):

Погрешнсти

2) число A нам не известно, что практически бывает чаще всего, и, следовательно, мы не можем определить и абсолютную погрешность Δ по формуле (1).

В этом случае полезно вместо неизвестной теоретической абсолютной погрешности Δ ввести ее оценку сверху, так называемую *предельную абсолютную погрешность*.

Определение 2. Под *предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа.

Таким образом, если Δ_a — предельная абсолютная погрешность приближенного числа a, заменяющего точное A, то

$$\Delta = |A - a| \leqslant \Delta_a. \tag{2}$$

Отсюда следует, что точное число A заключено в границах

$$a - \Delta_a \leqslant A \leqslant a + \Delta_a. \tag{3}$$

Следовательно, $a - \Delta_a$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta_a$ — приближение числа A по избытку.

В этом случае для краткости пользуются записью

$$A = a \pm \Delta_a.$$

Пример 1. Определить предельную абсолютную погрешность числа $a = 3{,}14$, заменяющего число π.

Решение. Так как имеет место неравенство

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15, \quad \text{то} \quad |a - \pi| < 0{,}01$$

и, следовательно, можно принять $\Delta_a = 0{,}01$.

Если учесть, что

$$3{,}14 < \pi < 3{,}142,$$

то будем иметь лучшую оценку: $\Delta_a = 0{,}002$.

Заметим, что сформулированное выше понятие предельной абсолютной погрешности является весьма широким, а именно: *под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа а понимается любой представитель бесконечного множества неотрицательных чисел* Δ_a, *удовлетворяющих неравенству* (2). Отсюда логически вытекает, что всякое число, большее предельной абсолютной погрешности данного приближенного числа, также может быть названо предельной абсолютной погрешностью этого числа. Практически удобно в качестве Δ_a выбирать возможно меньшее при данных обстоятельствах число, удовлетворяющее неравенству (2).

Погрешнсти

В записи приближенного числа, полученного в результате измерения, обычно отмечают его предельную абсолютную погрешность. Например, если длина отрезка $l = 214$ *см* с точностью до 0,5 *см*, то пишут $l = 214$ *см* $\pm$ 0,5 *см*. Здесь предельная абсолютная погрешность $\Delta_l = 0{,}5$ *см*, а точная величина длины l отрезка заключена в границах 213.5 *см* $\leqslant l \leqslant$ 214.5 *см*.

Относительная погрешность

Абсолютная погрешность (или предельная абсолютная погрешность) не достаточна для характеристики точности измерения или вычисления. Так, например, если при измерении длин двух стержней получены результаты $l_1 = 100{,}8\ см \pm 0{,}1\ см$ и $l_2 = 5{,}2\ см \pm 0{,}1\ см$, то, несмотря на совпадение предельных абсолютных погрешностей, качество первого измерения выше, чем второго. Для точности данных измерений существенна абсолютная погрешность, приходящаяся на единицу длины, которая носит название *относительной погрешности*.

Определение 3. *Относительной погрешностью* δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A $(A \neq 0)$, т. е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}. \tag{4}$$

Отсюда $\Delta = |A|\,\delta$.

Так же как и для абсолютной погрешности, введем понятие *предельной относительной погрешности*.

Определение 4. *Предельной относительной погрешностью* δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа. По определению имеем:

$$\delta \leqslant \delta_a, \tag{5}$$

т. е. $\frac{\Delta}{|A|} \leqslant \delta_a$, отсюда $\Delta \leqslant |A|\,\delta_a$.

Предельная относительная погрешность

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа a можно принять:

$$\Delta_a = |A|\,\delta_a. \tag{6}$$

Так как на практике $A \approx a$, то вместо формулы (6) часто пользуются формулой

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a. \tag{6'}$$

Отсюда, зная предельную относительную погрешность δ_a, получают границы для точного числа. То обстоятельство, что точное число лежит между $a(1-\delta_a)$ и $a(1+\delta_a)$, условно записывают так:

$$A = a(1 \pm \delta_a).$$

Пусть a — приближенное число, заменяющее точное A, и Δ_a — предельная абсолютная погрешность числа a. Положим для определенности, что $A > 0$, $a > 0$ и $\Delta_a < a$. Тогда

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leqslant \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

Следовательно, в качестве предельной относительной погрешности числа a можно принять число

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

Погрешнсти

2. Основные источники погрешностей

Погрешности, встречающиеся в математических задачах, могут быть в основном разбиты на пять групп.

1. Погрешности, связанные с самой постановкой математической задачи. Математические формулировки редко точно отображают реальные явления: обычно они дают лишь более или менее идеализированные модели. Как правило, при изучении тех или иных явлений природы мы вынуждены принять некоторые, упрощающие задачу, условия, что вызывает ряд погрешностей *(погрешности задачи)*.

Иногда бывает и так, что решить задачу в точной постановке трудно или даже невозможно. Тогда ее заменяют близкой по результатам приближенной задачей. При этом возникает погрешность, которую можно назвать *погрешностью метода*.

2. Погрешности, связанные с наличием бесконечных процессов в математическом анализе. Функции, фигурирующие в математических формулах, часто задаются в виде бесконечных последовательностей или рядов $\left(\text{например, } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$. Более того, многие математические уравнения можно решить, лишь описав бесконечные процессы, пределы которых и являются искомыми решениями.

Погрешнсти

Так как бесконечный процесс, вообще говоря, не может быть завершен в конечное число шагов, то мы вынуждены остановиться на некотором члене последовательности, считая его приближением к искомому решению. Понятно, что такой обрыв процесса вызывает погрешность, называемую обычно *остаточной погрешностью*.

3. Погрешности, связанные с наличием в математических формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно. Таковы, например, все физические константы. Условно назовем эту погрешность *начальной*.

4. Погрешности, связанные с системой счисления. При изображении даже рациональных чисел в десятичной системе или другой позиционной системе справа от запятой может быть бесконечное число цифр (например, может получиться бесконечная десятичная периодическая дробь). При вычислениях, очевидно, можно использовать лишь конечное число этих цифр. Так возникает *погрешность округления*. Например, полагая $\frac{1}{3} = 0{,}333$, получаем погрешность $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$. Приходится так же округлять и конечные числа, имеющие большое количество знаков.

Погрешнсти

5. Погрешности, связанные с действиями над приближенными числами (*погрешности действий*). Понятно, что, производя вычисления с приближенными числами, погрешности исходных данных в какой-то мере мы переносим в результат вычислений. В этом отношении погрешности действий являются н е у с т р а н и м ы м и.

Само собой разумеется, что при решении конкретной задачи те или иные погрешности иногда отсутствуют, или влияние их ничтожно. Но, вообще говоря, для полного анализа погрешностей следует учитывать все их виды. В дальнейшем мы ограничимся в основном исчислением погрешностей действий и погрешностей методов.