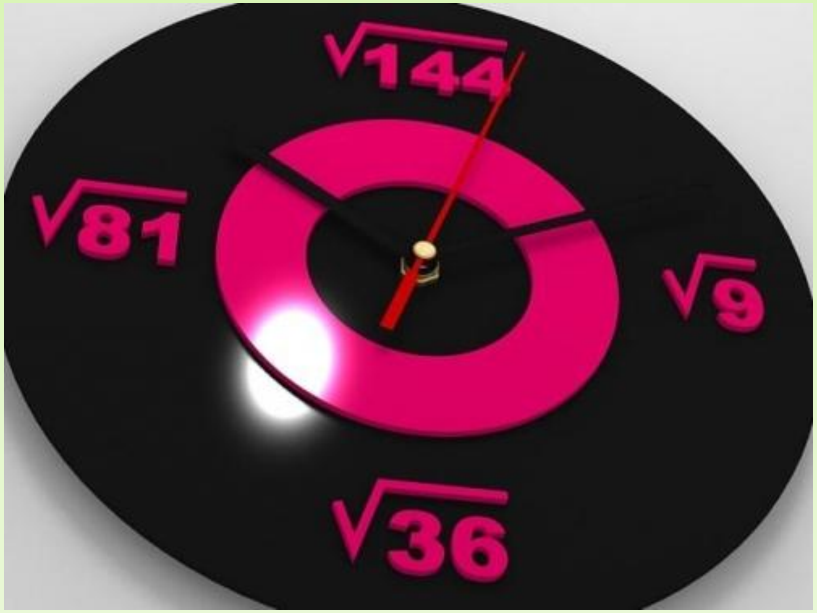
Степень с рациональным показателем и ее свойства.



«Люди, незнакомые с алгеброй, не могут представить себе тех удивительных вещей, которых можно достигнуть… при помощи названной науки».

Г.В.Лейбниц

История возникновения степени числа

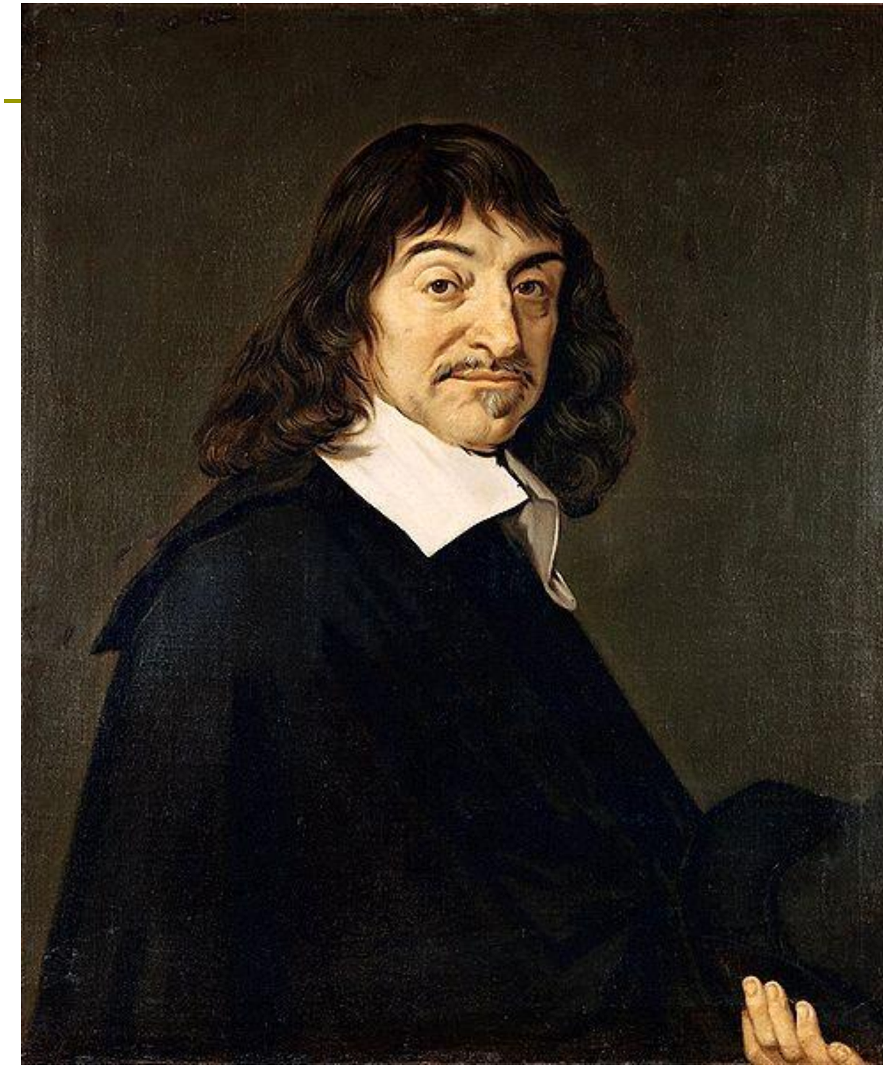
В знаменитой книге «Арифметике» Диофант Александрийский описывал первые натуральные степени

Одним из первых, кто в конце XYI-начале XYII века принял шаги к построению современной теории степеней, был Нидерландский математик Симон Стевин.
Он обозначал неизвестную величину кружком

, а внутри его указывал показатель степени.

Например: 1 , 2 , 3 ,

В его записи обозначали x, x^2, x^3.



У Рене Декарта в его «Геометрии» (1637) мы находим современное обозначение степеней $a^2, a^3, \ldots$

$$\sqrt[n]{a}$$

Повторение
Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n раз}}$$

Степенью числа а с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен а

$$1)\, 3^3 = 27$$

$$2)\, 5^3 = 125$$

$$3)\, 2^4 = 16$$

$$4)\, 3^1 = 3$$

$$1)\, a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2)\, a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3)\, \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4)\, \left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$$

$$5)\, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a \neq 0$$

а) $10^{-6}=\frac{1}{10^6}=\frac{1}{1000000}$;

б) $9^{-2}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$;

в) $a^{-1}=\frac{1}{a^1}$;

г) $x^{-20}=\frac{1}{x^{20}}$;

д) $(ав)^{-3}=\frac{1}{(ав)^3}$;

е) $(a+в)^{-4}=\frac{1}{(a+в)^4}$.

1) $3^0=1$

2) $5^0=1$

3) $22222222^0=1$

4) $100000^0=1$

Арифметический корень натуральной степени
Определение

Корнем n-ой степени из числа а называется такое число, n-я степень которого равна а.

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

$$\text{то есть } x^n = a$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ n-Й СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА a

$$\sqrt[n]{a}$$

a – ПОДКОРЕННОЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$\sqrt[2]{a}$ - КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ $\sqrt{a}$

$\sqrt[3]{a}$ - КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

$\sqrt[n]{a}$ - КОРЕНЬ n – Й СТЕПЕНИ

Тождества

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$$

$$\sqrt[6]{13^6} = 13$$

ДЕЙСТВИЕ, ПОСРЕДСТВОМ КОТОРОГО ОТЫСКИВАЕТСЯ КОРЕНЬ n – Й СТЕПЕНИ, НАЗЫВАЕТСЯ ИЗВЛЕЧЕНИЕМ КОРНЯ n – Й СТЕПЕНИ.

Примеры

1) $\sqrt[3]{27} = 3; \quad 3^3 = 27$

2) $\sqrt[4]{256} = 4; \quad 4^4 = 256$

3) $\sqrt[5]{0{,}00243} = 0{,}3; \quad 0{,}3^5 = 0{,}00243$

4) $\sqrt[3]{1000000} = 100; \quad 100^3 = 1000000$

5) $\sqrt[3]{64000} = 40; \quad 40^3 = 64000$

6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Устно:

- Вычислите:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \sqrt[7]{0} - \sqrt[8]{256} = 0 - 2 = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} = 5 + 3 = 8$$

$$\sqrt[10]{1} = 1 \quad \sqrt{64} - \sqrt[5]{243} = 8 - 3 = 5$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \sqrt[6]{64} + \sqrt[4]{625} = 2 + 5 = 7$$

Свойства корня n-ой степени (для $n \in N$, $m \in N$, $n > 1$, $m > 1$)

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$

2° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$

3° $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \geq 0$

4° $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, где $a \geq 0$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad где \ a \geq 0, \ n \in N, \ m \in Z$$

Примеры

a^p

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1. $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

2. $3^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3. $-8^{1,5} =$ не имеет смысла

4. $5a^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{a}$

5. $(x-y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-y)^2}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Представьте в виде степени с дробным показателем:

1. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[9]{a^4} = a^{\frac{4}{9}}$

3. $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

4. $b\sqrt{b} = b \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{1,5}$

5. $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} = (x+y)^{1,5}$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\text{где } a \ge 0,\ n, k \in N,\ m \in Z$$

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{10}{15}}$$

Свойства степени с рациональным показателем (для $p \in R$, $q \in R$)

1° $a^0 = 1$, где $a \neq 0$

2° $a^1 = a$

3° $a^{-1} = \frac{1}{a}$, где $a \neq 0$

4° $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, где $a \neq 0$

5° $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

6° $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, где $a \neq 0$

7° $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

8° $a^p \cdot b^p = (ab)^p$

9° $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$, где $b \neq 0$

10° $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

Решаем номера из учебника:
№№ 118, 119, 120, 121,123,124

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их

(Д. Пойа)

СПАСИБО ЗА УРОК !

Домашняя работа

Параграф 10

№№ 122, 125, 127