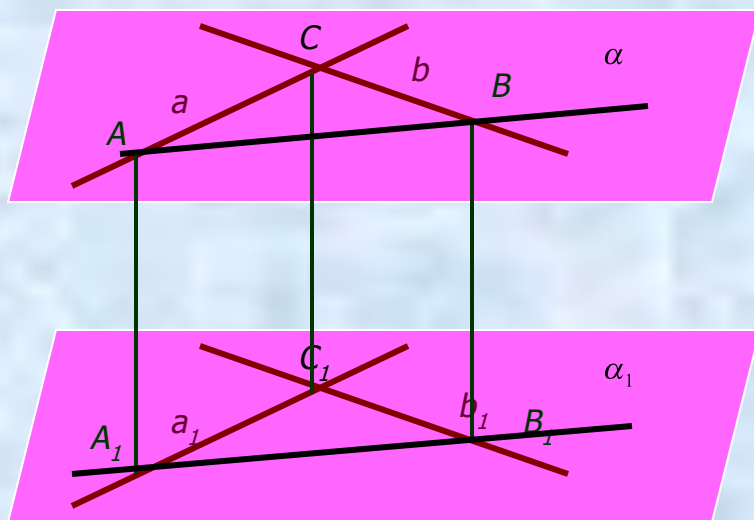


Перпендикулярность прямых и плоскостей

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 3.1 Если две
пересекающиеся
прямые параллельны
соответственно
двум перпендикулярным прямым,
то они тоже перпендикулярны.



Задача № 3 (П 14). Прямые АВ, АС и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если АВ = 3 см, ВС = 7 см, AD = 1,5 см.

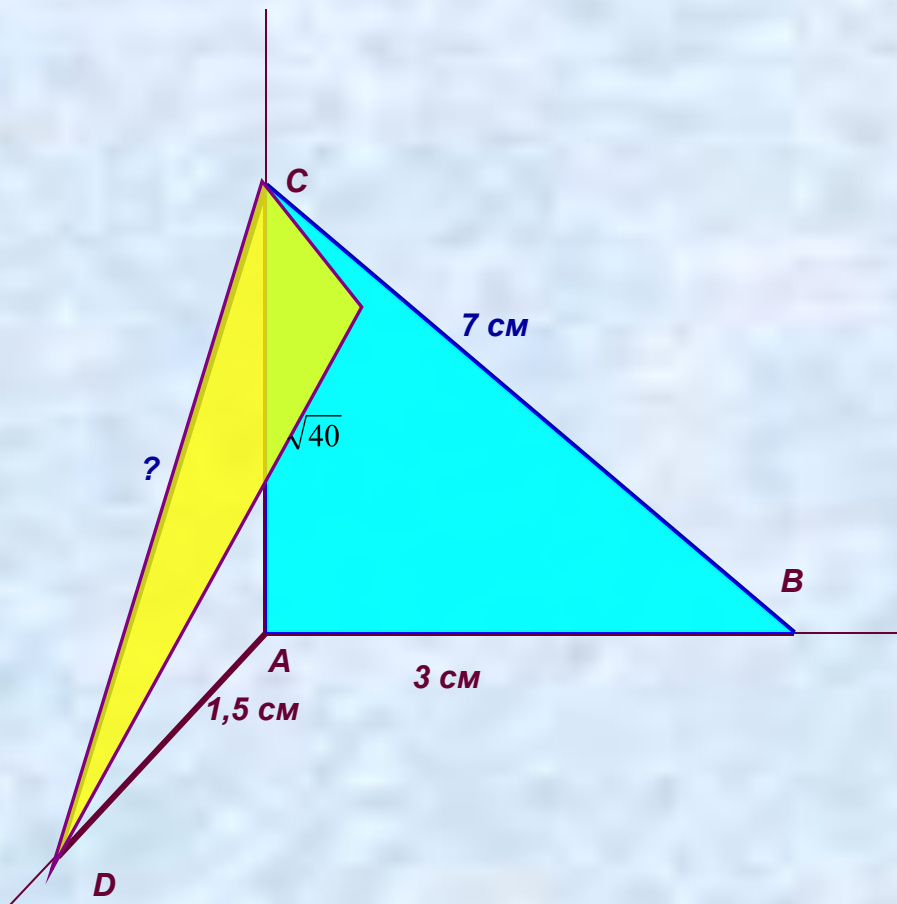
Дано: $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.
AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см.

Найти CD.

Решение: 1) $\triangle ABC$ – прямоугольный,
по теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 - AB^2 =$
 $49 - 9 = 40$, $AC = \sqrt{40}$ см.

2) $\triangle ACD$ – также прямоугольный,
по теореме Пифагора $CD^2 = AC^2 + AD^2 =$
 $= 40 + 2,25 = 42,25$. $CD = \sqrt{42,25}$ см = 6,5 см.

Ответ: CD = 6,5 см.



Задача № 3 2) (П 14). Прямые АВ, АС и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см.

Дано: $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.
 $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см.

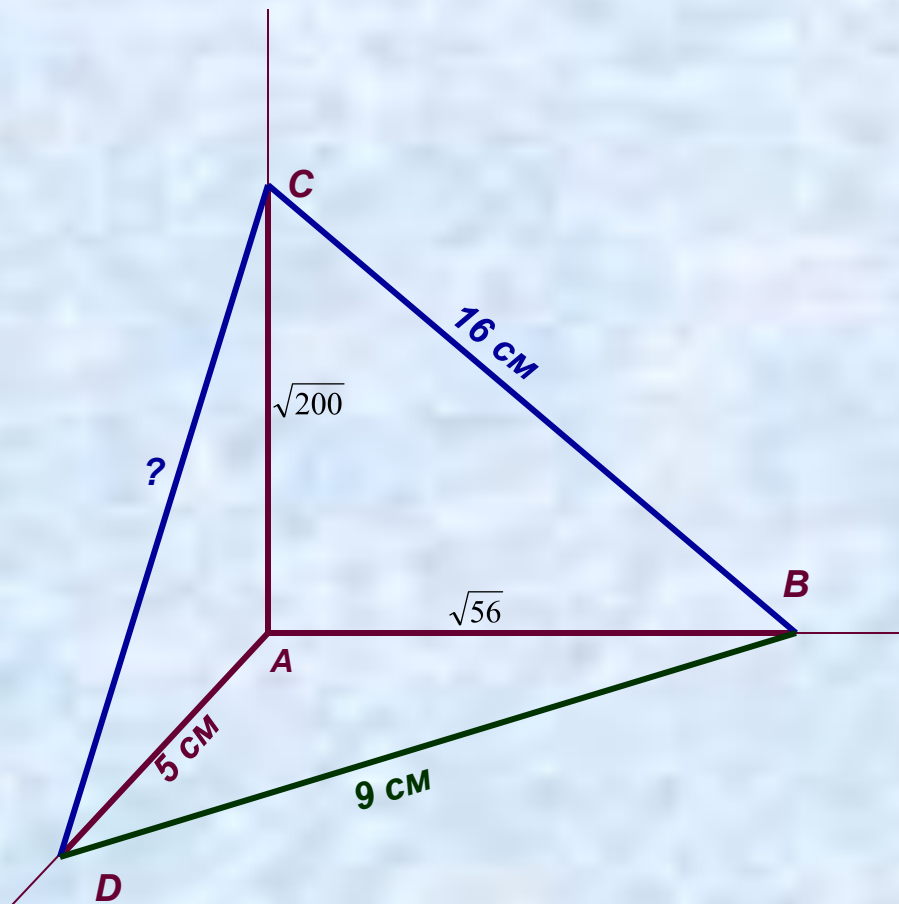
Найти CD.

Решение: 1) $\triangle ABD$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 81 - 25 = 56$, $AC = \sqrt{56}$ см.

2) $\triangle ACB$ – также прямоугольный, по теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 256 - 56 = 200$. $AC = \sqrt{200}$ см.

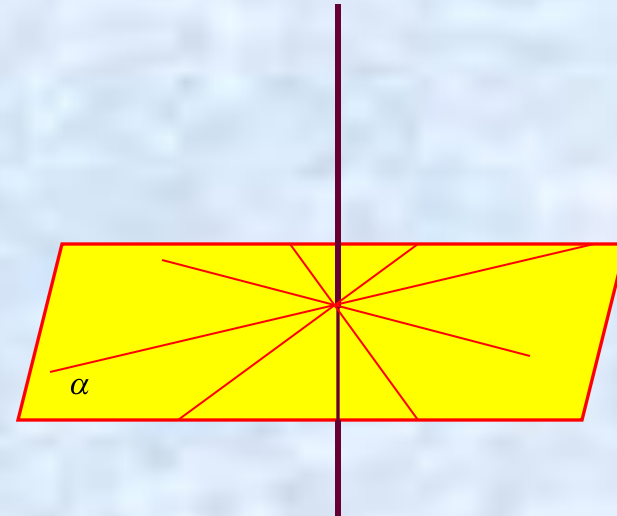
3) $\triangle ACD$ – прямоугольный, $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 200 + 25 = 225$, $CD = 15$ см.

Ответ: $CD = 15$ см.



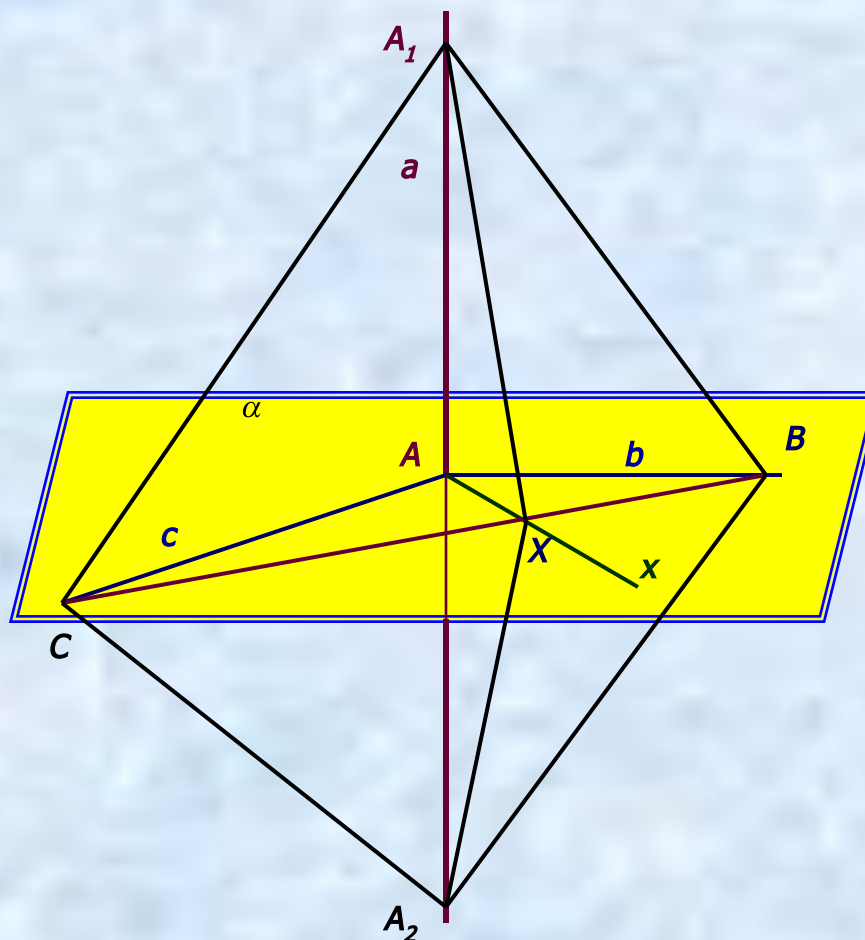
Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости



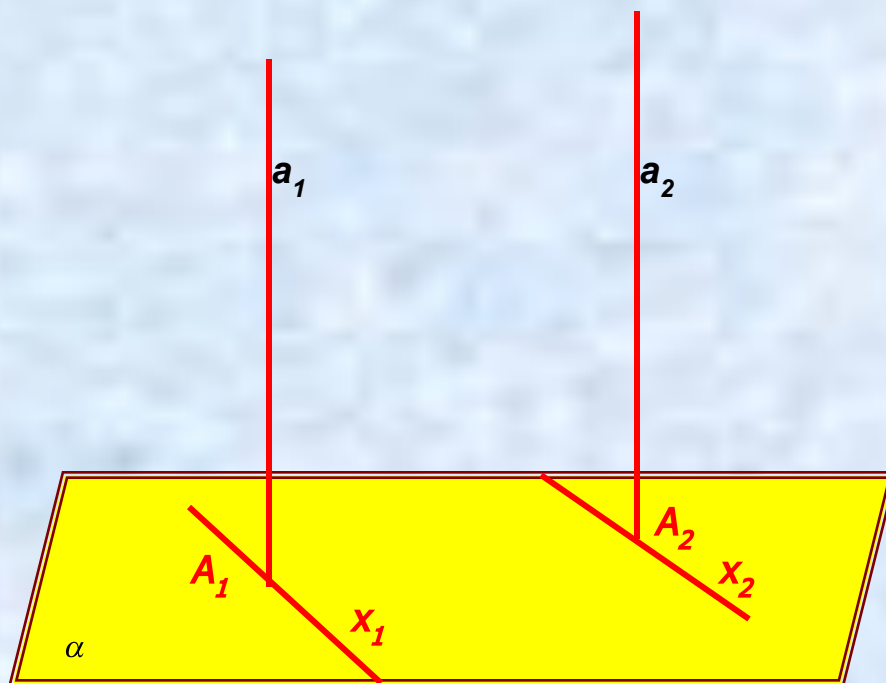
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 3.2 Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

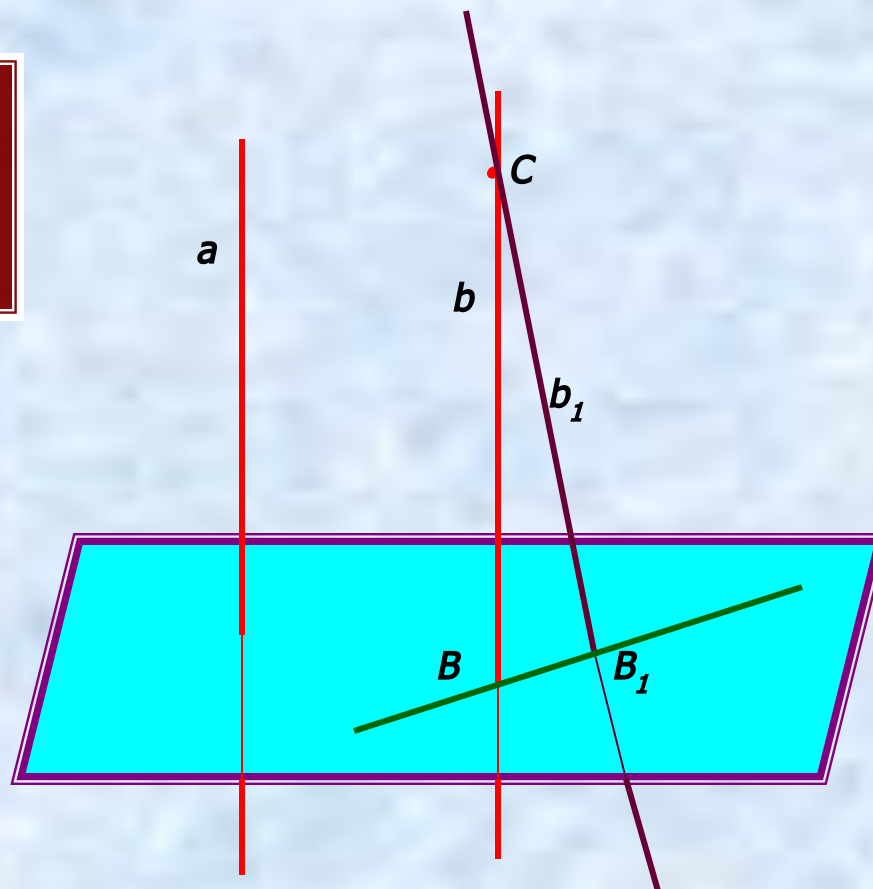


Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

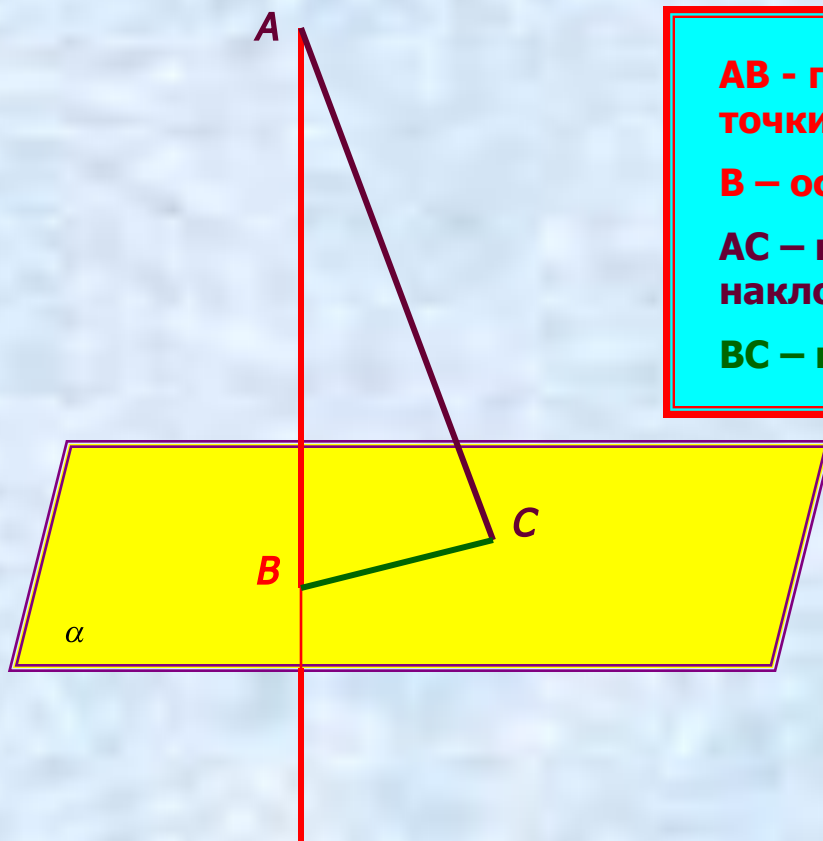
Теорема 3.3 Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



Теорема 3.4 Две прямые,
перпендикулярные одной и
той же плоскости,
параллельны.



Перпендикуляр и наклонная.



AB - перпендикуляр, расстояние от точки до плоскости.

B – основание перпендикуляра.

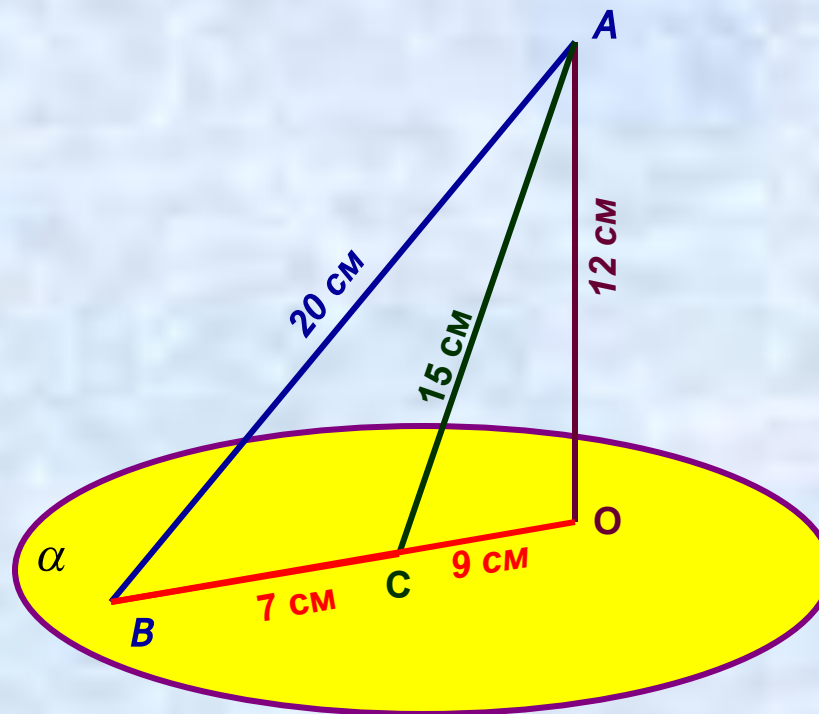
AC – наклонная, **C**- основание наклонной.

BC – проекция наклонной

Задача Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 15 см и 20 см. Разность проекций этих наклонных равна 7 см. Найдите проекции наклонных.

Дано: AB и AC – наклонные к плоскости α
 $AO \perp \alpha$, $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, $BC = 7$ см.

Найти: BO и CO .



Решение: 1) Найдём площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$p = (a+b+c)/2 = (20+15+7)/2 = 21 \text{ см.} \quad S = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-15) \cdot (21-7)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = \\ = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ см}^2.$$

$$2) \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}, \quad AO = 2 \cdot 42 / 7 = 84 / 7 = 12 \text{ см.}$$

3) $\triangle AOC$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $OC^2 = AC^2 - AO^2 = 225 - 144 = 81$,
 $OC = 9$ см. 4) $OB = BC + OC = 7 + 9 = 16$ см.

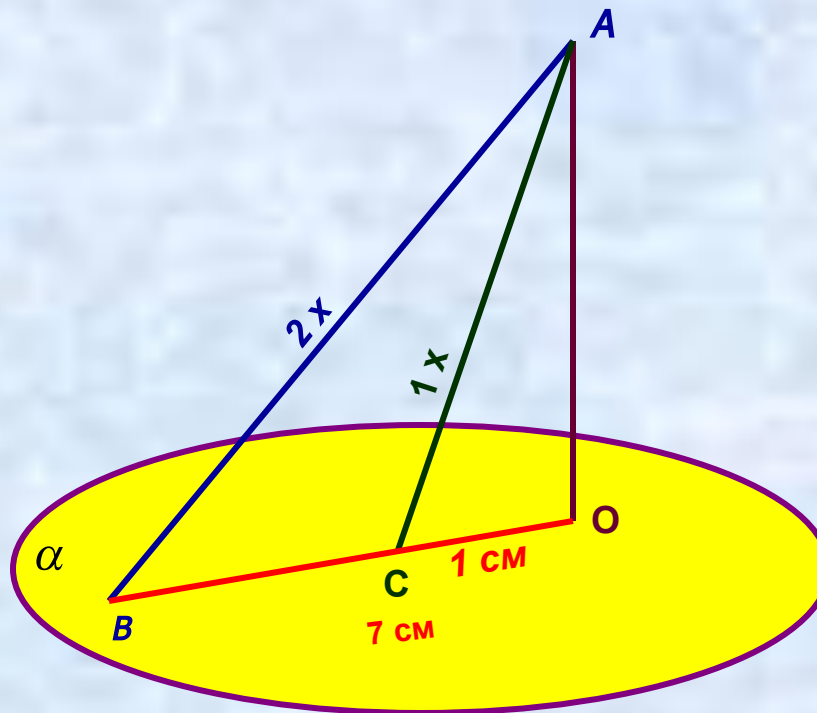
Ответ: 9 см и 16 см.

Задача 24 2) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

Дано: AB и AC – наклонные к плоскости

$AO \perp \alpha$, $AB : AC = 2 : 1$, $BO = 7$ см, $CO = 1$ см.

Найти: AB и AC .



Решение: Пусть $AB = 2x$ см, $AC = x$. В $\triangle ABO$ $AO^2 = AB^2 - BO^2 = 4x^2 - 49$,

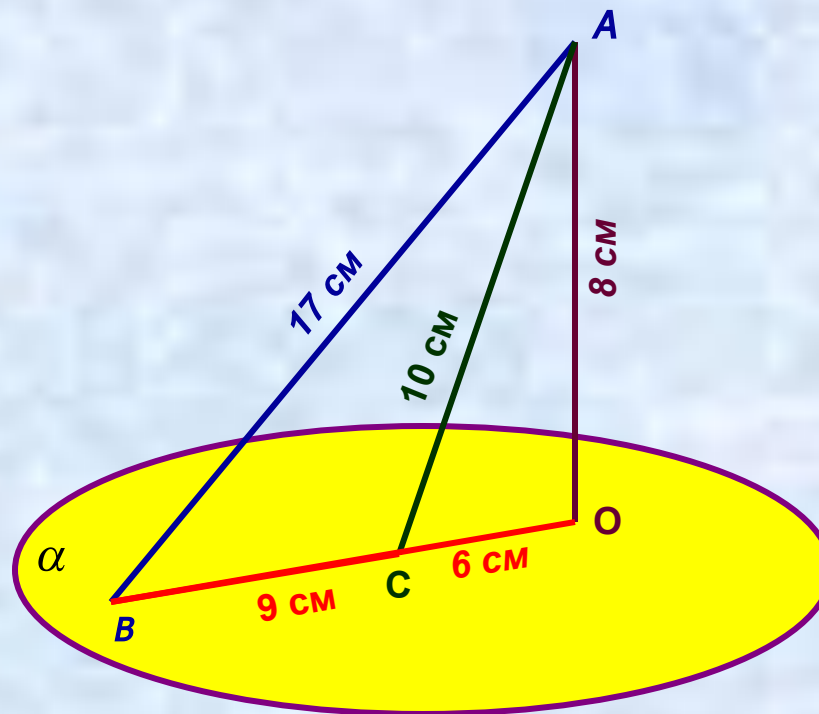
В $\triangle ACO$ $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 1$. Т. к. левые части этих равенств равны, то равны и правые: $4x^2 - 49 = x^2 - 1$, $3x^2 = 48$, $x^2 = 16$, $x = 4$.

Таким образом, $AC = 4$ см, $AB = 8$ см.

Ответ: 4 см и 8 см.

Задача 23 Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

Дано: AB и AC – наклонные к плоскости α
 $AO \perp \alpha$, $AB = 17$ см, $AC = 10$ см, $BC = 9$ см.
Найти: BO и CO .



Решение: 1) Найдём площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$p = (a+b+c)/2 = (17+10+9)/2 = 18 \text{ см.} \quad S = \sqrt{18 \cdot (18-17) \cdot (18-10) \cdot (18-9)} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ см}^2.$$

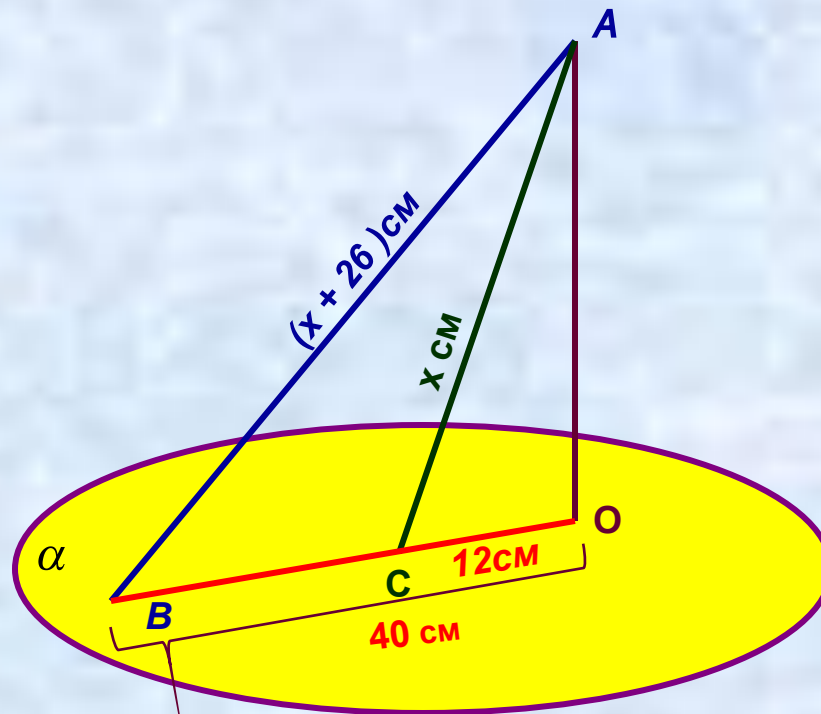
$$2) \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}, \quad AO = 2 \cdot 36 / 9 = 72 / 9 = 8 \text{ см.}$$

3) $\triangle ABC$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $OC^2 = AC^2 - AO^2 = 100 - 64 = 36$,
 $OC = 6$ см. 4) $OB = BC + OC = 9 + 6 = 15$ см.

Ответ: 6 см и 15 см.

Задача 24 1) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.

Дано: AB и AC – наклонные к плоскости
 $AO \perp \alpha$, $AC = x$ см, $AB = x+26$ см, $CO = 12$ см,
 $OB = 40$ см.
Найти: AB и AC .



Решение: Пусть $AC = x$ см, $AB = (x+26)$ см. В $\triangle ABO$ $AO^2 = AB^2 - OB^2 = (x+26)^2 - 40^2$,
В $\triangle ACO$ $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 12^2$. Т. к. левые части этих равенств равны, то
равны и правые: $(x+26)^2 - 40^2 = x^2 - 12^2$, $x^2 + 52x + 676 - 1600 = x^2 - 144$, $52x = 780$, $x = 15$ см.

Таким образом, $AC = 15$ см, $AB = 41$ см.

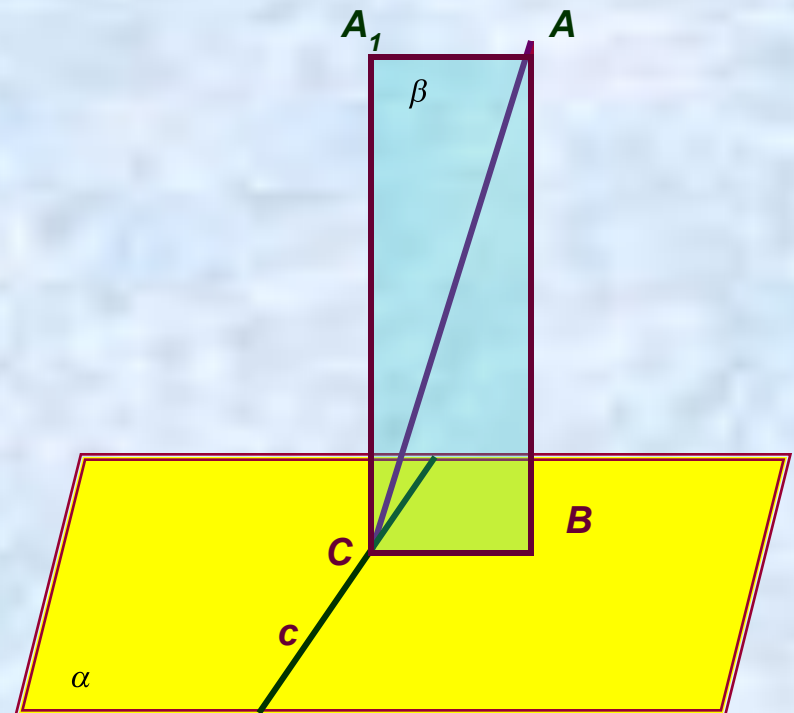
Ответ: 15 см и 41 см.

Теорема о трёх перпендикулярах.

Теорема 3.5 Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.

Обратная теорема

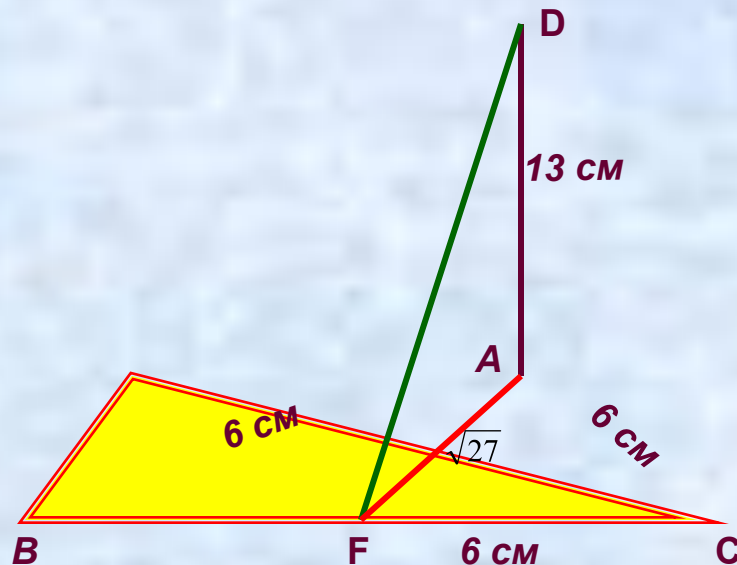
Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



Задача № 48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восстановлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC , если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=BC=AC=6$ см, $AD \perp (ABC)$, $AD=13$ см.

Найдите: $\rho(D; BC)$.



Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую BC .

По теореме о трёх перпендикулярах $AF \perp BC$,

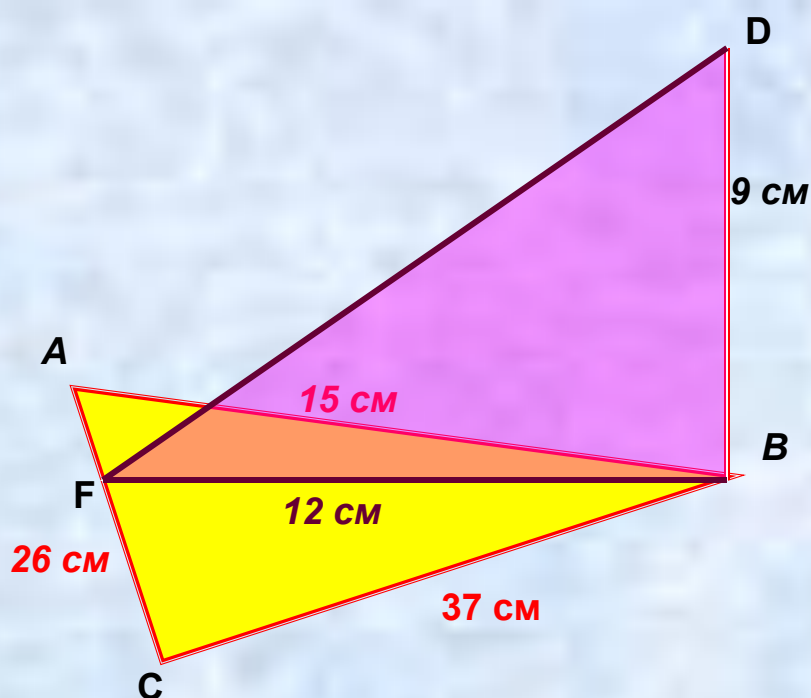
т.к. треугольник ABC – равносторонний, то AF – медиана, т.е. $BF=FC=3$ см.

$\triangle AFC$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 36 - 9 = 27$, $AF = \sqrt{27}$ см.

$\triangle ADF$ – прямоугольный, $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 169 + 27 = 196$, следовательно $DF = 14$ см.

Ответ: 14 см.

Задача . Стороны треугольника 15 см, 26 см и 37 см. Через вершину среднего по величине угла проведён перпендикуляр в его плоскости, равный 9 см. Найдите расстояние от концов этого перпендикуляра до противоположной стороны.



Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки B опустим перпендикуляр BF на прямую BC.

По теореме о трёх перпендикулярах $DF \perp AC$. BF найдём из треугольника ABC.

Найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона. $p = (a+b+c)/2 = (15+26+37)/2 = 39$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 2} = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 156 / 26 = 12 \text{ см.}$$

Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора $DF^2 = DB^2 + BF^2$,

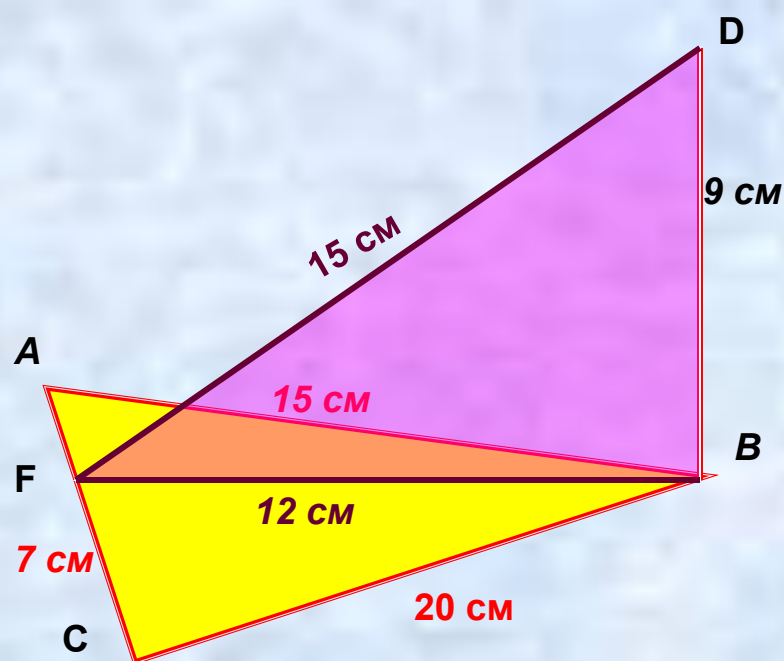
$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см и 15 см.

Задание на дом: П. 19,

Задача . Из вершины треугольника ABC восставлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC , если $BD = 9$ см, $AB = 15$ см, $BC = 20$ см, $AC = 7$ см.

Задача . Из вершины треугольника ABC восставлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC, если $BD = 9$ см, $AB = 15$ см, $BC = 20$ см, $AC = 7$ см.



Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую AC.

По теореме о трёх перпендикулярах $BF \perp AC$. BF найдём из треугольника ABC. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона.

$$p = (a+b+c)/2 = (15+20+7)/2 = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \quad BF = 2 \cdot S / AC = 2 \cdot 42 / 7 = 12 \text{ см.}$$

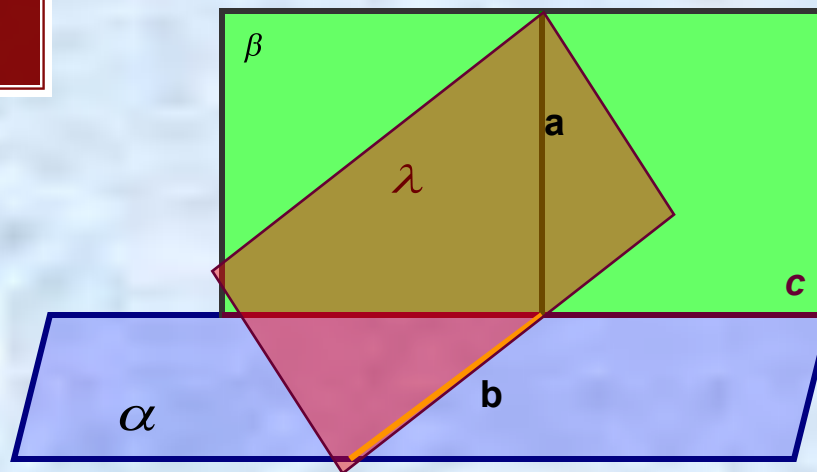
Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора $DF^2 = DB^2 + BF^2$,

$$DF^2 = 81 + 144 = 225, \quad DF = 15 \text{ см.}$$

Ответ: 15 см.

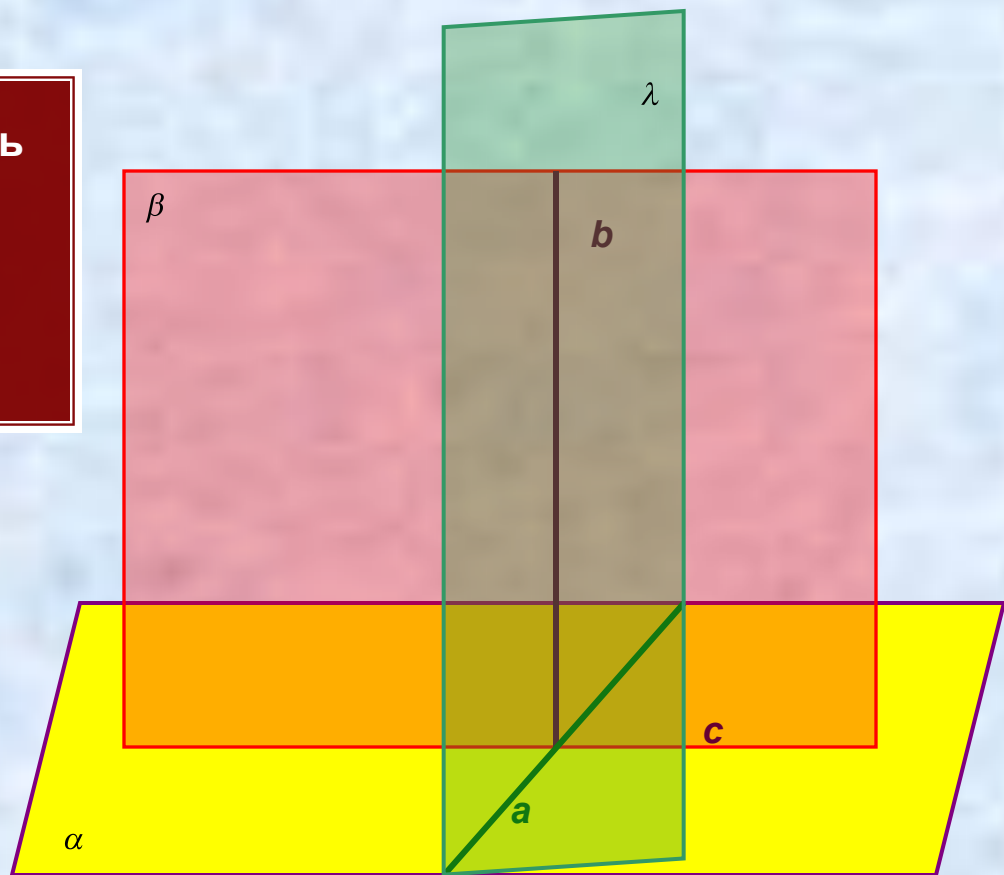
Перпендикулярность плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.

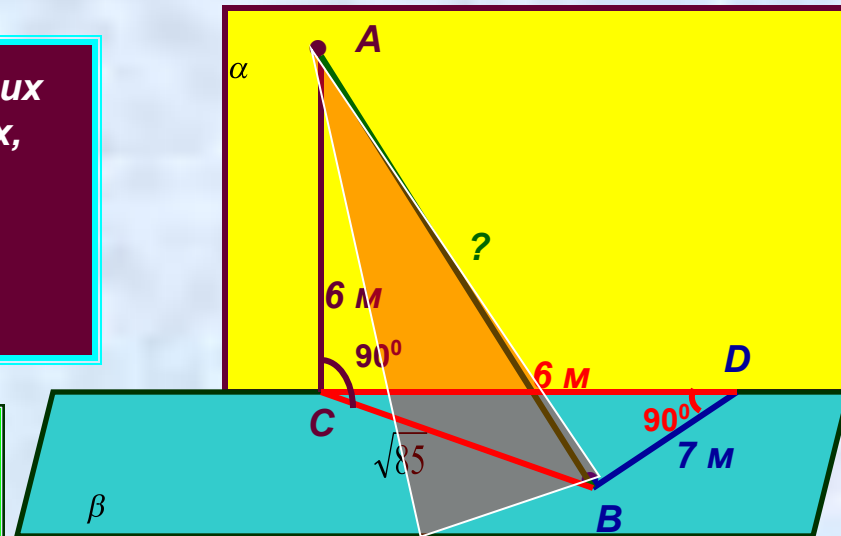


Признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 3.6 Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Задача № 59 1) Из точек A и B , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB , если: $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м.



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$

$AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м.

Найти: AB .

Решение: $\triangle BCD$ – прямоугольный,

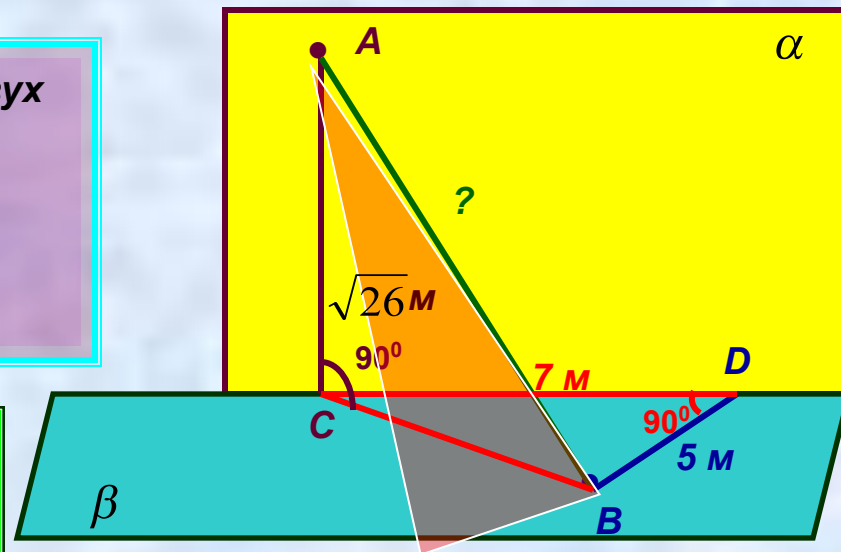
по теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 + BD^2$, $BC^2 = 36 + 49 = 85$, $BC = \sqrt{85}$ м.

$\triangle ABC$ – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$AB^2 = 36 + 85 = 121$, $AB = 11$ м.

Ответ : 11 м.

Задача Из точек A и B , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB , если: $AC = \sqrt{26}$ м, $BD = 5$ м, $CD = 7$ м.



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$,
 $BD \perp CD$

$AC = \sqrt{26}$ м, $BD = 5$ м, $CD = 7$ м.

Найти: AB .

Задача. Из меньшего угла треугольника со сторонами 9 см, 10 см и 17 см восстановлен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояния от концов этого перпендикуляра до прямой, содержащей противоположную сторону.

Решение:

1) Т.к. $\triangle ABC$ - тупоугольный, то перпендикуляр, проведённый из точки В, мы должны провести на продолжение стороны АС.

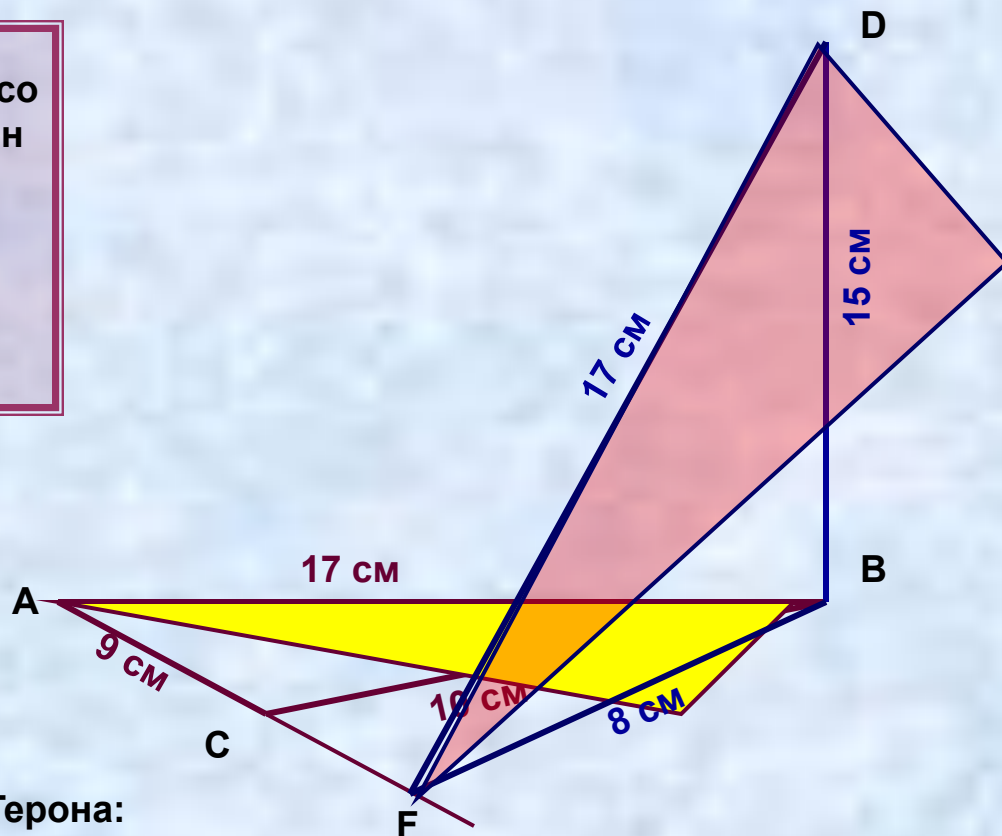
2) Найдём площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона:

$$p = (a + b + c) : 2 = (9 + 10 + 17) : 2 = 18 \text{ (см)}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot (18-9) \cdot (18-10) \cdot (18-17)} \\ = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ см}^2.$$

$$3) S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot S}{a}, \quad BF = (2 \cdot S) : AC = (2 \cdot 36) : 9 = 8 \text{ (см)}.$$

4) $DF \perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах. $\triangle DBF$ – прямоугольный, поэтому $DF^2 = BD^2 + BF^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289, \quad DF = 17 \text{ см}.$

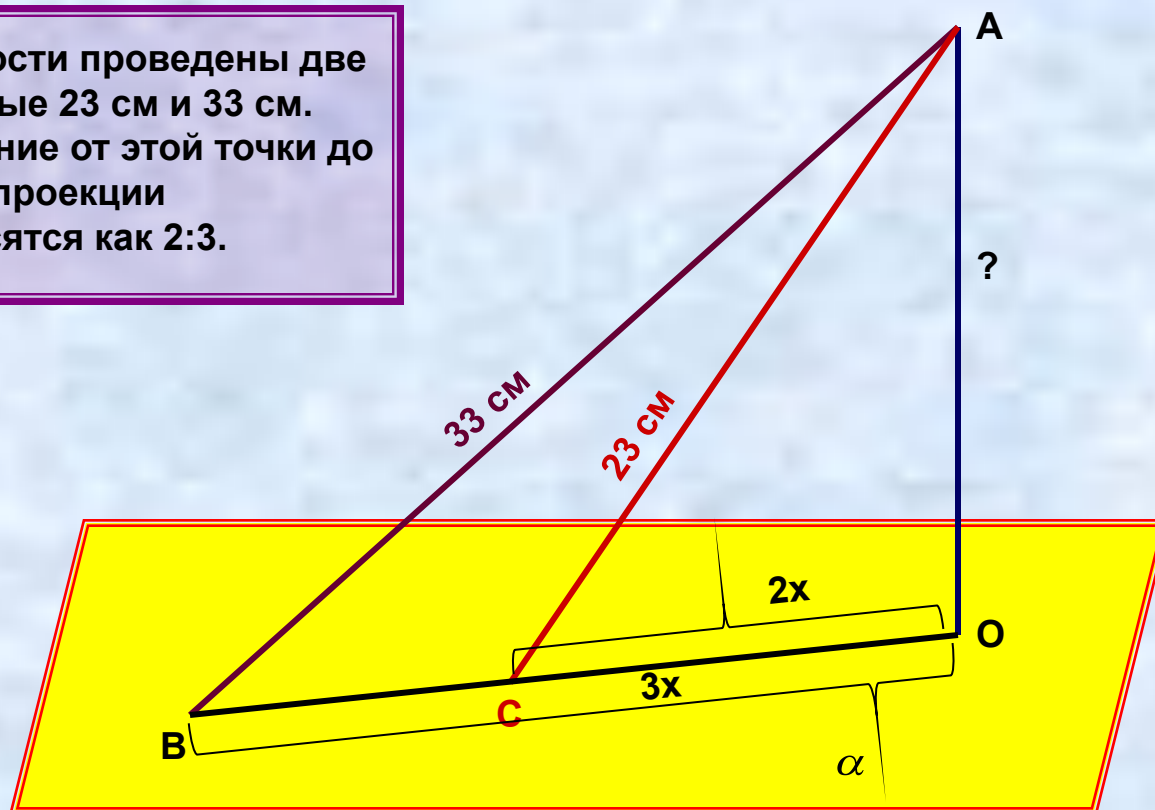
Ответ: 8 см и 17 см.



**Задание на дом: П 20,
задачи № № 25, 59 з),**

К задаче № 25

Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.



**СПАСИБО
ЗА СОВМЕСТНУЮ
РАБОТУ.**

До свидания.