

Метод мажорант.

- Школьникам
- Учителям

Землянова Н.В.,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №131»
г.Барнаул 2012

A vertical decorative bar on the left side of the slide, featuring a repeating pattern of yellow triangles, red triangles, blue cubes, and green circles.

В материалах, предлагаемых выпускникам для решения на едином государственном экзамене, есть задачи, требующие специальных методов решения, которые, к сожалению, не изучаются в школе. Один из таких методов-метод мажорант. Красивейший способ решения сложных задач.

Содержание.

- *Определение мажоранты функции*
- *Примеры функций, имеющих мажоранту*
- *Метод мажорант*
- *Примеры решения задач методом мажорант*

Определение мажоранты функции.

Мажорантой функции $f(x)$ на множестве P называется такое число M , что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$.

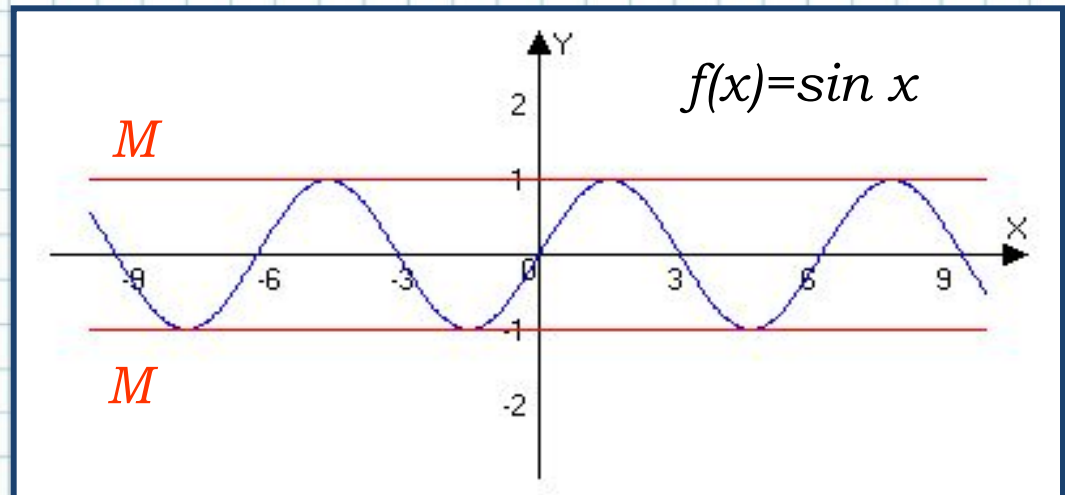
Примеры функций, имеющих мажоранту.

1. Тригонометрические функции.

$$f(x) = \sin x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

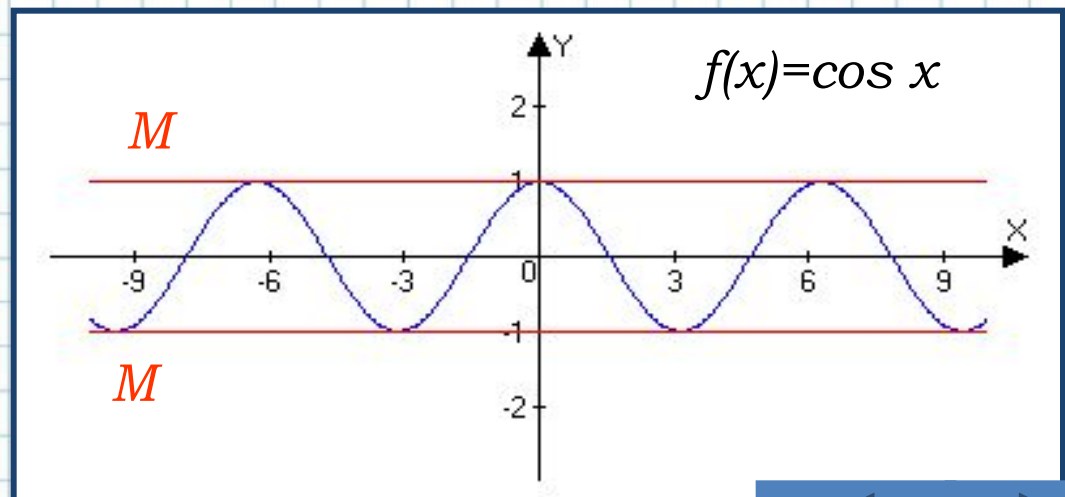
$$M=1, M=-1$$



$$f(x) = \cos x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

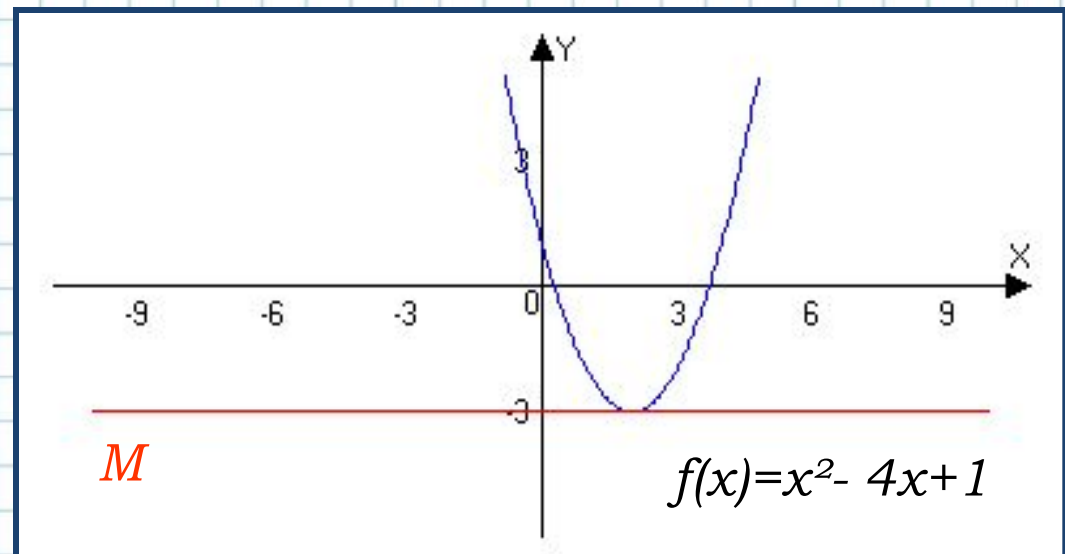
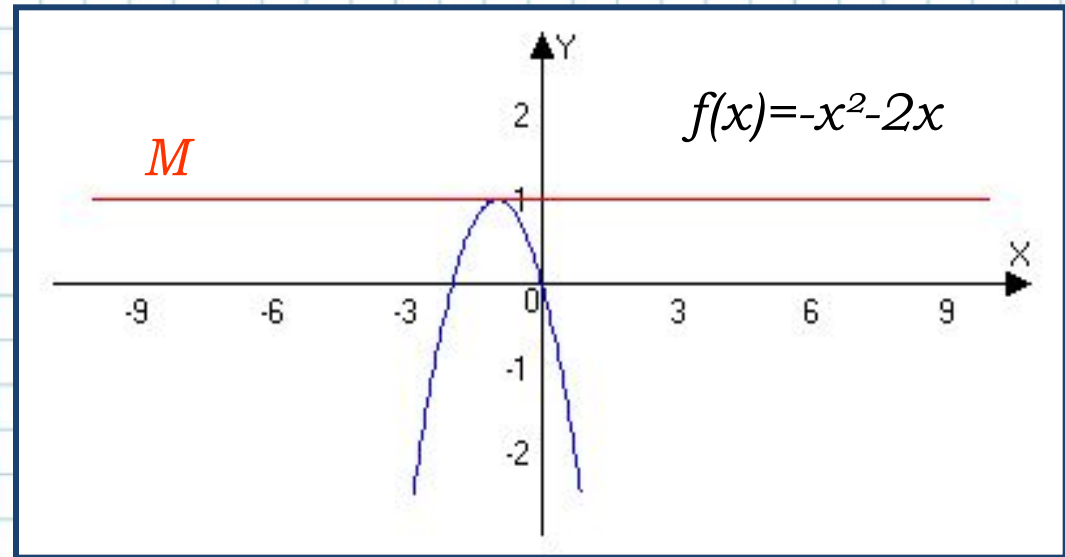
$$M=1, M=-1$$



2. Квадратичная функция.

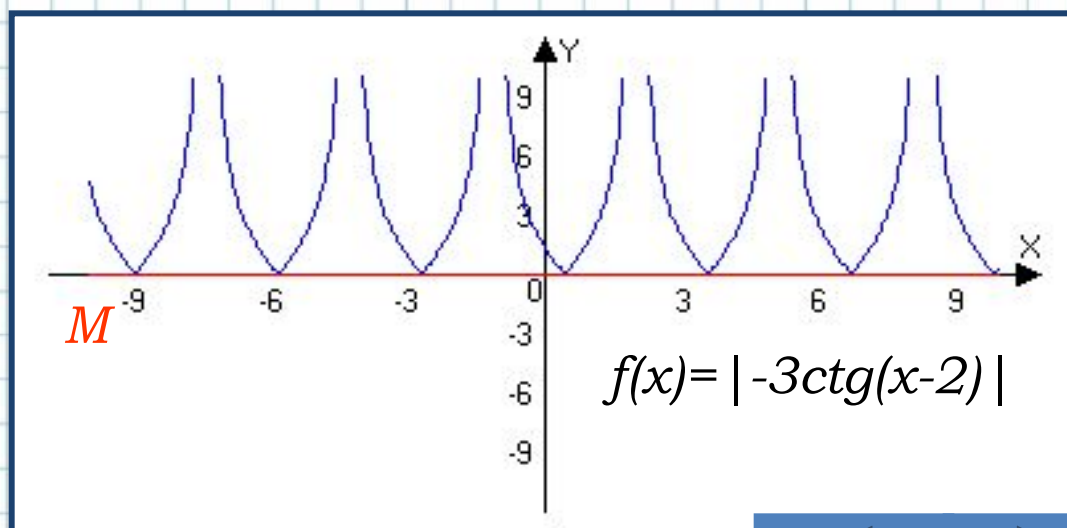
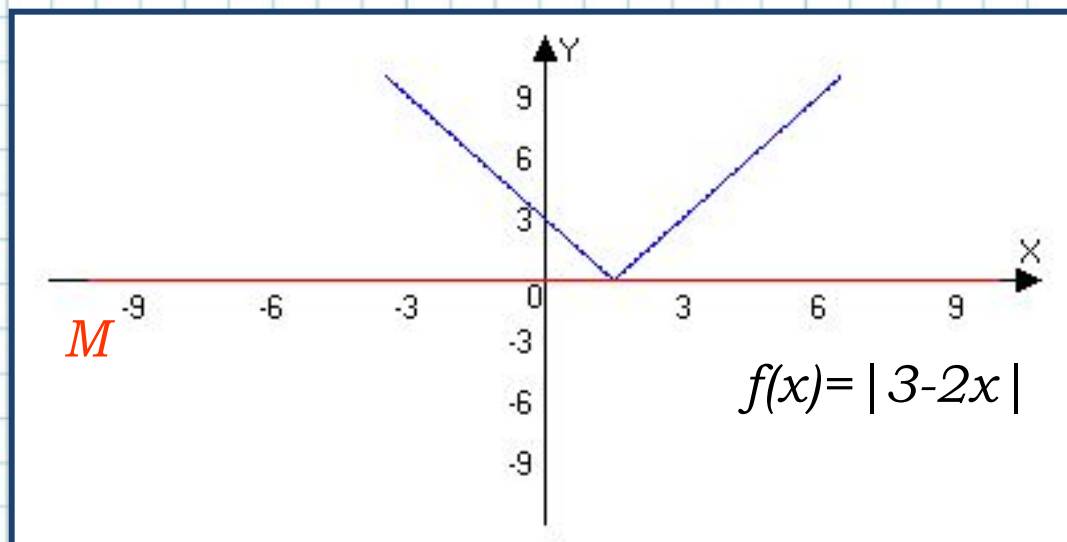
$f(x) = ax^2 + bx + c$,
(p ; n) -
вершина параболы

$$M = n = (4ac - b^2) / 4a$$



3. Функции, содержащие переменную под знаком модуля.

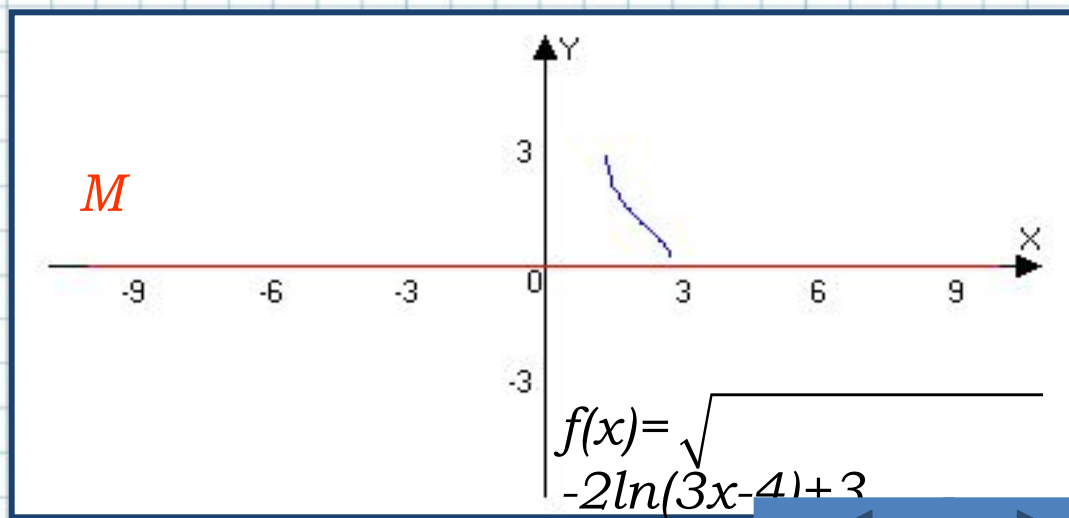
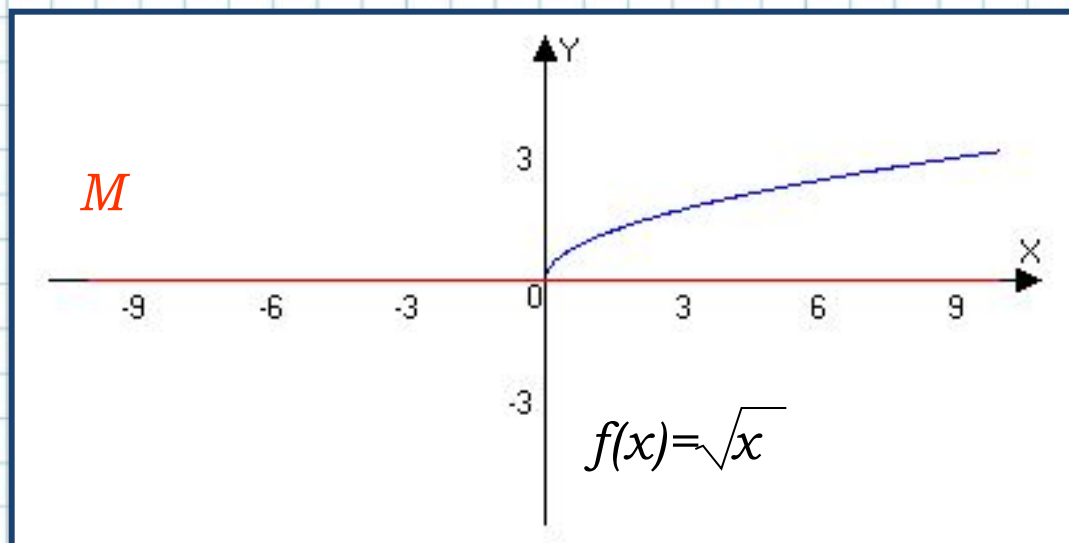
$$f(x) = |g(x)|$$
$$0 \leq |g(x)| < +\infty$$
$$M=0$$



4. Функции, содержащие переменную под знаком корня.

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$
$$0 \leq \sqrt{g(x)} < +\infty$$

$$M=0$$





В более сложных случаях для того, чтобы определить мажоранту, нужно провести исследование функции, применяя различные методы. При этом можно использовать свойства неравенств, некоторые известные равенства и неравенства, определение возрастающей и убывающей функций и т. д.

Метод мажорант.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, определённые на множестве D . Пусть $f(x)$ ограничена на этом множестве числом A сверху, а $g(x)$ ограничена на этом множестве тем же числом A , но снизу. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, определённые на множестве D . Пусть $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на этом множестве снизу (сверху) числами A и B соответственно. Тогда уравнение $f(x) + g(x) = A+B$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = B \end{cases}$$

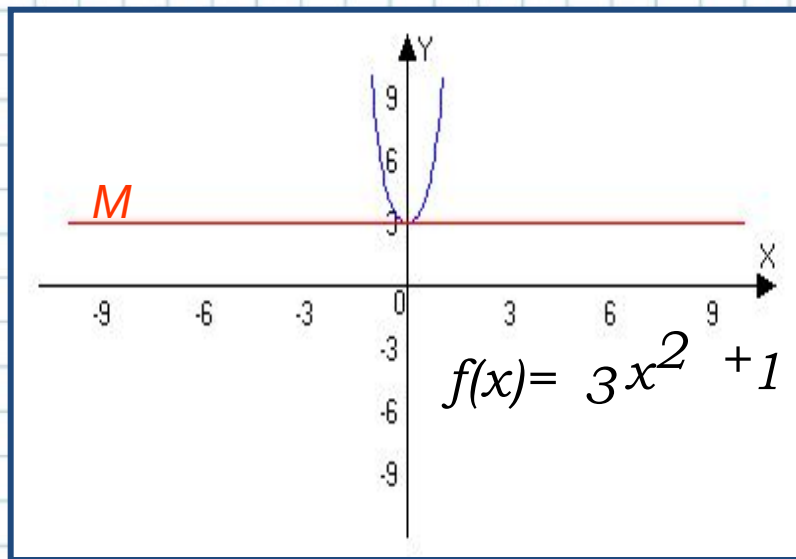
Теорема 3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые неотрицательные функции, определённые на множестве D . Пусть $f(x)$ ограничена сверху (или снизу) числами A и B соответственно. Тогда уравнение $f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$ равносильно системе уравнений (при условии, что $A > 0$ и $B > 0$)

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = B \end{cases}$$

Примеры решения задач методом мажорант.

1. Найдите мажоранту и область значения функции $f(x) = 3x^2 + 1$ (Рассмотрим два способа.)

1. Графический.



Очевидно, $E(f) = [3; +\infty]$, $M=0$

2. Аналитический.

Оценим выражение $3x^2 + 1$

$$0 \leq x^2 < +\infty$$

$$1 \leq x^2 + 1 < +\infty$$

$$3 \leq 3x^2 + 1 < +\infty$$

$$E(f) = [3; +\infty], M=0$$

Очевидно, что графический способ не всегда удобен, так как может потребоваться строить графики очень сложных функций! Поэтому мы будем учиться решать такие задания аналитически!

Найдите область значения функции.

Пример.

$$f(x) = \log_2(1+3\sin^2 x)$$

Решение.

$$0 \leq 3\sin^2 x \leq 3$$

$$1 \leq 1 + 3\sin^2 x \leq 4$$

$$0 \leq \log_2(1+3\sin^2 x) \leq 2$$

$$0,25 \leq 0,5 \log_2(1+3\sin^2 x) \leq 1$$

$$E(f) = [0,25; 1]$$

Задания для самостоятельной работы.

$$1) f(x) = 4^{\frac{1}{1-2^x}}$$

$$2) f(x) = \log_3 \frac{7}{17 + \sqrt{16 + |\lg x|}}$$

$$3) f(x) = \frac{8}{\pi} \arctg\left(\frac{1}{4}(3\sin x - \cos x + 2)\right)$$

2. Решите уравнения.

Пример.

$$3^x + 3^{-x} = \log_2(4 - |x|)$$

Решение.

а) Так как $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то

$$3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2.$$

б) $4 - |x| \leq 4$

Ю

$$\log_2(4 - |x|) \leq 2.$$

Из а), б)

получим

$$3^x + 3^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\log_2(4 - |x|) = 2$$

Задания для самостоятельной работы.

1) $\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin 46^\circ$

2) $\sqrt{\cos^2(\sin x)} = 1 + \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 6x + 10)$

3) $2^{x+1} + 2^{\frac{1}{x}} = -4x^2 - x^2$

4) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 29}} = \frac{1}{4}$

3. Решите неравенства.

Пример.

$$\cos x - \sqrt[3]{z^3} \geq y^2 + \frac{\pi}{3}$$

Решение.

$$a) 1 \leq \cos x \leq 1$$

+

$$-\infty < -\sqrt[3]{z^3} \leq 0$$

$$-\infty < \cos x - \sqrt[3]{z^3} \leq 1$$

$$b) y^2 + \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{3} > 1$$

Правая часть неравенства не больше 1, левая – больше 1, значит, корней нет.

Задания для самостоятельной работы.

$$1) 2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} \leq 0$$

$$2) 2x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2 - 2x + 2}$$

$$3) x^2 + 4x + 6 \leq \frac{2}{y^2 - 6y + 10}$$

$$4) \cos 3x \leq x^6 + 1$$

4. Различные задания

Пример.

Найти наибольшее целое значение c , при котором решение неравенства

$$||2x+4|-7|-13 \leq 2c^2$$

удовлетворяет условию $x \in [-37; 35]$.

Решение.

$$-37 \leq x \leq 35$$

$$-70 \leq 2x+4 \leq 74$$

$$0 \leq |2x+4| \leq 74$$

$$0 \leq ||2x+4|-7| \leq 67$$

$$-13 \leq ||2x+4|-7|-13 \leq 54$$

Для выполнения неравенства, надо, чтобы $-13 \leq 2c^2 \leq 54$.

То есть наибольшее целое $c=5$.

Задания для самостоятельной работы.

1) Найти сумму целых значений функции

$$f(x) = 3\sqrt{36\cos_2 x - 12\sin x + 27}$$

2) Из множества значений функции

$$f(x) = 3 + 4\arcsin \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2}$$

удалили целые числа. Сколько получилось числовых промежутков?

Пример задания группы С (С 3, ЕГЭ 2011).

Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1$
Решение.

$$а) 0 < 7^{-|x-3|} \leq 1$$

$$б) \log_2(6x-x^2-7) = \log_2(2-(x-3)^2) \leq \log_2 2 = 1$$

Так как, левая часть неравенства не больше 1, а правая -
равна 1, то

$$\begin{array}{l} \text{М} \\ \text{П} \\ \text{П} \\ \text{Н} \\ \text{П} \\ \text{Н} \\ \text{О} \end{array} \log_2(6x-x^2-7) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$
$$7^{-|x-3|} = 1$$

Решите самостоятельно задание С3.

1. (2011 г.) $\cos^2(x+1) \cdot \lg(9-2x-x^2) \geq 1.$

2. (ЕГЭ 2012. Типовые тестовые задания.

Под редакцией А. Л. Семенова, И. В. Яценко)

М
П
П
Н
П
О

$$25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0$$

$$\log_{1+\frac{x^2}{3}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0$$

Удачи в изучении математики