Раздел 1.

Теория вероятностей

Лектор: старший преподаватель кафедры математики
Константиновская Наталья Валерьевна

Литература:

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. 7-е изд. - М.: Высшая школа, 2001 – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для вузов. 7-е изд. - М.: Высшая школа, 2001 – 459 с.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.
4. Морозов Ю. В. Основы высшей математики и статистики. Учебник. – М.: Медицина, 1998. – 232 с.
5. Сергиенко В. Н., Бондарева И. Б. Математическая статистика в клинических исследованиях. – М.: ГЭОТАР МЕДИЦИНА, 2000. – 256 с.

Предмет теории вероятностей и математической статистики,

его основные задачи и области применения

Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

- **Теория вероятностей** – раздел математики, в котором изучаются закономерности массовых, случайных явлений.
- Знание закономерностей, которым подчиняются массовые, случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.
- **Пример.** Нельзя определить заранее результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз.

- Одной из главных задач в теории вероятностей, является задача, определения количественной меры возможности появления события.
- Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники:
  - теории надежности;
  - теории массового обслуживания;
  - теоретической физике;
  - астрономии;
  - теории стрельбы;
  - теории автоматического управления и др.

- Теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и др.

Краткая историческая справка

- Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI-XVII вв.).
- Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654-1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

- Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.
- Новый наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А. Маркова (1856-1922) и А.М. Ляпунова (1857-1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.

- Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С.Н. Бернштейн, В.И. Романовский, А.Н. Колмогоров, А.Я. Ханчин, Б.В, Гнеденко, Н.В. Смирнов и др.).
- В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит российским математикам.

Тема. Элементы комбинаторики

План:

1. Основные понятия комбинаторики.
2. Правила комбинаторики.

1. Основные понятия комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называют **соединениями**.

Различают три основных вида соединений:

-размещения;

-перестановки;

-сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются **комбинаторными**, а раздел математики занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$

обозначают символом n!

(читают **«n-факториал»**), причем:

1!=1

0!=1

Размещения

Размещениями из n элементов по m в каждом называют такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом

$$A_n^m$$

и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 60$$

Перестановки

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом

$$P_n$$

и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Пример.

Сколькими способами можно рассадить пять человек по пяти местам?

Пример.

Сколькими способами можно рассадить пять человек по пяти местам?

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом обозначается символом

$$C_n^m$$

и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Пример.

Сколькими способами из 10 пациентов можно создать группы психологической разгрузки по шесть человек в каждой?

Пример.

Сколькими способами из 10 пациентов можно создать группы психологической разгрузки по шесть человек в каждой?

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6!} = 210$$

Замечание.

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам.

2. Правила комбинаторики

Правило суммы.

Если некоторый объект $\boldsymbol{A}$ может быть выбран из совокупности объектов $\boldsymbol{m}$ способами, а другой объект $\boldsymbol{B}$ может быть выбран $\boldsymbol{n}$ способами, то выбрать либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$ можно $\boldsymbol{m+n}$ способами.

Правило произведения.

Если объект $\boldsymbol{A}$ можно выбрать из совокупности объектов $\boldsymbol{m}$ способами и после каждого такого выбора объект $\boldsymbol{B}$ можно выбрать $\boldsymbol{n}$ способами, то пара объектов (A,B) в указанном порядке может быть выбрана $\boldsymbol{m}\ \boldsymbol{n}$ способами.

Пример.

В меню столовой стационара: 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

Пример.

В меню столовой стационара: 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Тема: Случайные события. Понятие вероятности события

План:

1. Испытания и события.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Статистическое определение вероятности.
5. Алгебра событий.

1. Испытания и события

- Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит.
- Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента**.

- Событие рассматривают, как результат испытания (опыта).
- События обозначают заглавными буквами латинского алфавита

$$A, \ B, \ C \quad \text{и т.д.}$$

Виды событий

- событие называется **случайным**, если в результате опыта оно может произойти, либо не произойти;
- событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного опыта;
- событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в данном опыте.

Пример.

Испытание - подбрасывание игральной кости.

События (исходы):

A – выпало четное число очков;

B – выпало 8 очков;

C – выпало менее 7 очков.

2. Виды случайных событий

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте (т.е. появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же опыте).

События называются **единственно возможными**, если в результате опыта появление одного из них, есть событие достоверное.

События называются **равновозможными**, если ни у одного из них нет преимущества для появления перед другими.

События образуют **полную группу событий**, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

Пример.

В аптеку принимаются на реализацию лекарственные препараты от двух поставщиков.

События:

A- отсутствие поставок;

B- поступление товара от одного из поставщиков;

C - поступление товара от двух поставщиков;

образуют полную группу.

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из противоположных событий обозначить через $\boldsymbol{A}$, то другое обозначают

$$\overline{A}$$

Пример.

Брошена монета.

События:

A - «появился герб»;

$\overline{A}$ -«появилась надпись».

3. Классическое определение вероятности

- Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры, возможности появления события.
- Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность.

- **Вероятностью события** ***А*** **-** называется число, равное отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события А к общему числу возможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- где m-число исходов благоприятствующих наступлению события A;
- n – общее число возможных исходов.

Свойства вероятности

- Вероятность достоверного события равна единице;
- Вероятность невозможного события равна нулю;
- Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

4. Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

- Относительная частота события *A* определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

- где *m*-число появлений события, *n* – общее число испытаний.

Пример.

Среди 1000 новорожденных оказалось 517 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Событие A – рождение мальчика.

$$W(A) = \frac{517}{1000} = 0{,}517$$

Сопоставляя определение вероятности и относительной частоты, делаем вывод: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Вероятностью события A - называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

5. Алгебра событий

Суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Если A и B **совместные** события, то их сумма A+B обозначает наступление события A или события B или обоих событий вместе.

Если A и B **несовместные** события, то их сумма A+B обозначает наступление или события A или события B.

Пример.

Победитель соревнования награждается призом (событие A), денежной премией (событие B).

Что представляют собой события A+B?

Пример.

Победитель соревнования награждается призом (событие A), денежной премией (событие B).

Что представляют собой события A+B?

Решение.

Событие A+B состоит в награждении победителя или призом или денежной премией, или тем и другим.

Произведением событий

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Пример.

Событие, состоящее в одновременной продаже в аптеке двух препаратов, является произведением событий А и В, где

А - продажа одного препарата,

В - продажа другого препарата.

Вероятность наступления события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло, называется **условной вероятностью события А при условии В** и обозначается

$$P_B(A)$$

Пример.

В коробке содержится 3 белых и 3 желтых шара. Из коробки дважды вынимают наугад по одному шару, не возвращая их в коробку.

Найти вероятность появления белых шаров при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен желтый шар (событие A).

Решение.

После первого испытания в коробке осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомое условие вероятности:

$$P_A(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$