

Математический анализ

**Составитель: Никулина Л.С.,
старший преподаватель кафедры
Математики и Моделирования**

Введение

Назначение курса

Математический анализ является фундаментальной дисциплиной, составляющей основу математического образования. Курс предназначен для ознакомления студентов с основными понятиями математического анализа и их применением к решению задач. В курсе излагаются традиционные классические методы математического анализа

Цели преподавания дисциплины

Развитие интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

Обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования технических и других задач.

Задачи преподавания

На примерах продемонстрировать студентам сущность математических методов, научить приемам исследования и решения математически формализованных простейших задач, привить навыки самостоятельной работы с математической литературой.

Литература

Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2.- М.: высшая школа, 1981

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1987.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2. - М.: Наука, 1984.

Литература

Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики.-М.: Наука, 1978.

Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова.
Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.-
Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2001.

Сборник задач по высшей математике. Сост. И. В.
Пивоварова, Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина. -
Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2002.

Контроль

Виды контроля: В процессе обучения студенты должны выполнить 2 контрольных работы, 3 ИДЗ и сдать теорию. Кроме того, студенты должны пройти промежуточную аттестацию.

**Итоговая аттестация
предусмотрена в виде экзамена
(компьютерное тестирование).**

Аттестации

Способы проведения промежуточных аттестаций, способ проведения итоговой аттестации и условия получения на ней положительной оценки.

Для получения положительной оценки на экзамене студент должен выполнить все контрольные работы, выполнить и защитить все ИДЗ, проявлять активность на занятиях и регулярно выполнять все домашние задания.

Пределы и непрерывность

- 1. Определение предела функции.***
- 2. Односторонние пределы.***
- 3. Бесконечно малые и бесконечно большие.***
- 4. Теоремы о пределах.***
- 5. Некоторые признаки существования предела.***
- 6. Замечательные пределы.***
- 7. Непрерывность.***
- 8. Свойства непрерывных функций.***

Лекция 1

Пределы функций

Определение функции

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$, где X и Y - данные числовые множества, и при этом каждому элементу $y \in Y$ поставлен в соответствие хотя бы один элемент $x \in X$, то y **называется функцией от x , определенной на множестве X .**

Обратная функция

Пусть между элементами множеств X и Y функция $y=f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, то есть $\forall x \in X$ соответствует один и только один его образ $y=f(x) \in Y$ и обратно, для $\forall y \in Y$ найдется единственный прообраз $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$, где $y \in Y$, устанавливающая соответствие между элементами множеств Y и X , называется **обратной** для функции $y = f(x)$.

Определение окрестности

Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал $\alpha < x < \beta$, окружающий эту точку, из которого, как правило, удалена сама точка a .

Под **окрестностью $O(\infty)$** символа бесконечность понимается внешность любого отрезка $[\alpha, \beta]$, то есть $O(\infty) = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$.

Определение предельной точки

δ -окрестностью точки a называется интервал $(a-\delta, a+\delta)$, не содержащий точку a , т.е. $O(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X , кроме быть может точки a .

***Точку a мы будем называть
предельной точкой множества
 X ,***

если в любой δ -окрестности точки a содержится бесконечно много точек $x \in X$, то есть $O(a) \cap X \neq \emptyset$ для $\forall O(a)$.

Определение предела

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$, следует неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Другое определение предела

Говорят, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует δ -окрестность точки a $O(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$, такая, что для $\forall x \in O(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

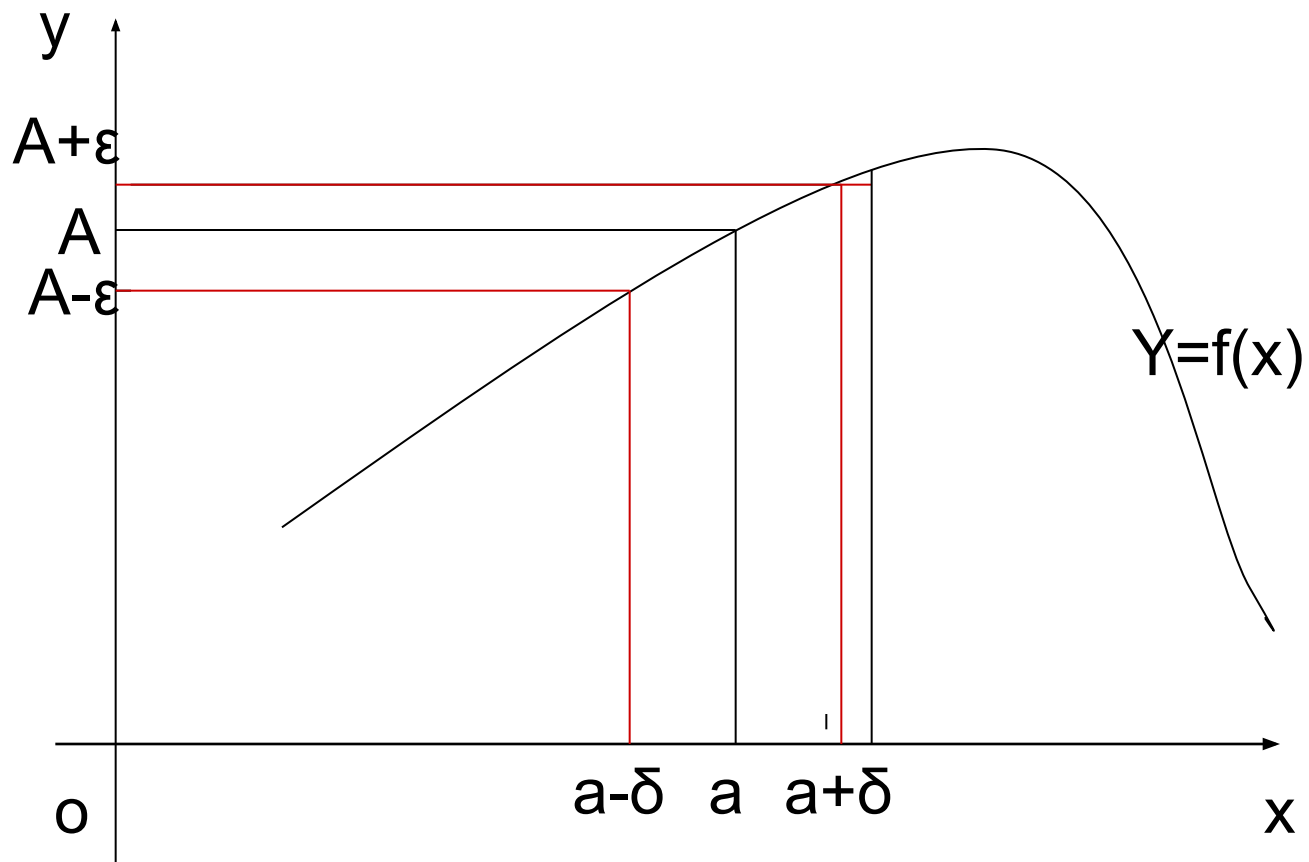
При этом пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Утверждение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
эквивалентно следующему:

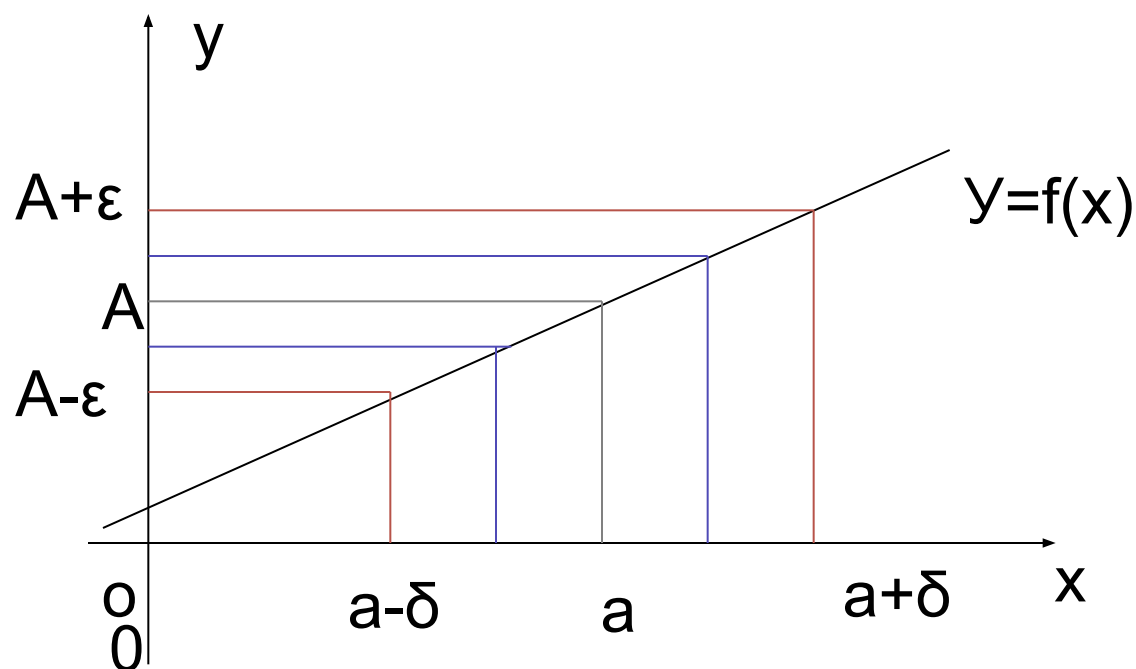
$|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta$, где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$
зависит от ε и по смыслу определения
является достаточно большим
положительным числом.

Множество всех точек x , для которых
 $|x| > \Delta$, очевидно является симметричной
окрестностью символа ∞ .

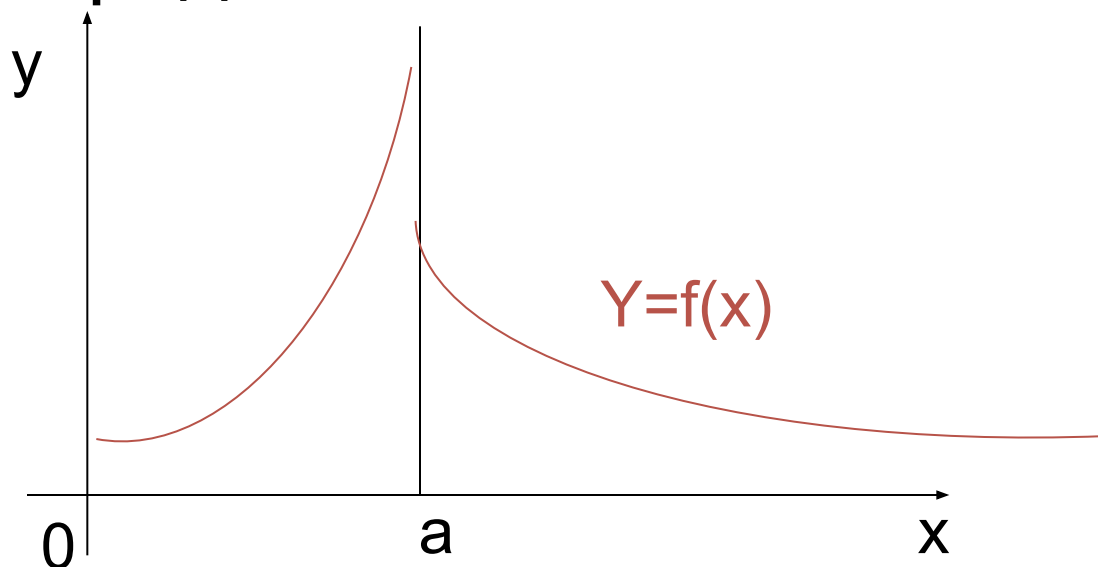
Геометрическая иллюстрация



Приведем еще один рисунок,
поясняющий определение предела.



На этом рисунке изображена функция, которая в точке a не имеет предела.



Односторонние пределы

Односторонние пределы

Любой интервал (α, a) , правым концом которого является точка a , называется *левой окрестностью* точки a .

Аналогично любой интервал (a, β) , левым концом которого является точка a , называется ее *правой окрестностью*.

Односторонние пределы

Символически запись $x \rightarrow a + 0$
означает, что x стремится к a справа,
оставаясь большим a , то есть при $x > a$;
запись $x \rightarrow a - 0$
означает, что x стремится к a слева, то
есть при $x < a$.

Односторонние пределы

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ будем называть

левосторонним пределом

функции (при $x \rightarrow a$ слева),

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ - это

правосторонний предел функции.

Односторонние пределы

Теорема о существовании предела

Функция $y = f(x)$ имеет $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$
в том и только том случае, когда
существуют и равны друг другу ее
левосторонний и правосторонний
пределы при $x \rightarrow a$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \end{aligned}$$

Бесконечно малые и бесконечно большие

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Ясно, что тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in O(a, \delta)$ и $\forall \varepsilon > 0$.

Например, функция $f(x) = x^2$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Это равносильно тому, что ^{$x \rightarrow a$} каким бы ни было число $M > 0$, найдется такая окрестность $O(a, \delta)$, что для всех

$$x \in O(a, \delta) \mid f(x) > M.$$

Например, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая при $x \rightarrow 0$.

Лемма.

Если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$,

$$\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a.$$

Если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$
при $x \rightarrow a$ и $\alpha(x) \neq 0$.

Лекция 2

Свойства бесконечно малых.

Теорема 1.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема 2.

Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

Теорема 3.

Произведение бесконечно малой при $x \rightarrow a$ функции на функцию, ограниченную при $x \rightarrow a$, есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Следствие.

Целая положительная степень бесконечно малой при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$(\alpha(x))^n$$

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то в силу определения предела функции получаем: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x \in O(a, \delta)$, что означает, что $f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Тогда, полагая $f(x) - A = \alpha(x)$,
получим: $f(x) = A + \alpha(x)$, где
 $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Теоремы о пределах

Теорема.

Если функция $f(x) = c$ постоянна в некоторой окрестности точки a , то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

Теорема.

Если $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то этот предел единствен.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на данном множестве X* , если существует такое положительное число M , что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in X$.

Если такое число M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*

Лемма. Если функция $f(x)$ имеет предел A при $x \rightarrow a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки $x = a$.

Теорема. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и пусть $M < f(x) < N$ в некоторой окрестности точки $x = a$. Тогда $M \leq A \leq N$.

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

Теорема 1.

Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x) \pm g(x)$, причём

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема 2.

Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует и предел произведения $f(x) \cdot g(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Следствие.

Постоянный множитель можно
выносить за знак предела.

Теорема 3. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то существует и предел частного, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Пример

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}.$$

По теореме о пределе частного

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = 1$$

Пример

Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$.

Преобразуем данную функцию так, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель $x - 1$, на который и разделим далее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x + 1)} = 0.$$

Пример

Найти $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x-1}+3$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} &= \frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \\ &= \frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+3}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{1}{6}.$$

Пример

Еще один пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$.
Положим $x = y^{12}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y + 1)(y^2 + 1)}{y^2 + y + 1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Признаки существования предела

«Теорема о двух милиционерах»



Теорема (о промежуточной функции).

Пусть в некоторой окрестности $O(a)$ точки a функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел A при $x \rightarrow a$, то есть

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A.$$

Тогда функция $f(x)$ имеет тот же предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

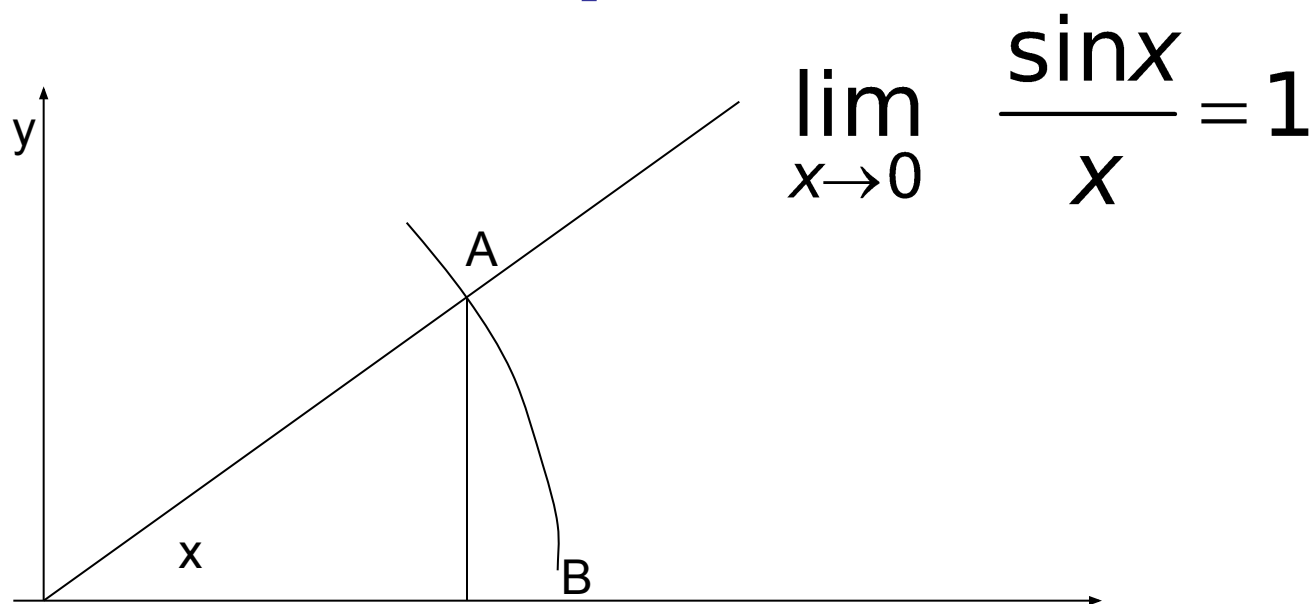
Первый замечательный предел

Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называют первым замечательным пределом.

Первый замечательный предел



Это объясняется тем, что бесконечно малая дуга почти не успевает изменить свое направление, т.е. искривиться.

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ или}$$

$$\lim_{a(x) \rightarrow 0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

Примеры

Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 =$$

$$= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 5.$$

Примеры

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$. Полагая $\frac{3}{x} = y$,
получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{3}{y}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^3 = e^3. \end{aligned}$$

Сравнение бесконечно малых

Две бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одинакового***

порядка, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, где $k \neq 0$ и конечно.

При этом пишут: $\alpha(x) = O(\beta(x))$

Две бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad .$$

Это записывают так: $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция $\alpha(x)$ называется *функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \quad .$$

В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$.

Приведем некоторые замечательные примеры в дополнение к первому и второму замечательным пределам.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Теорема. Если при $x \rightarrow a$ бесконечно малые $\varphi(x) \approx \psi(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{f(x)}.$$

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0.$$