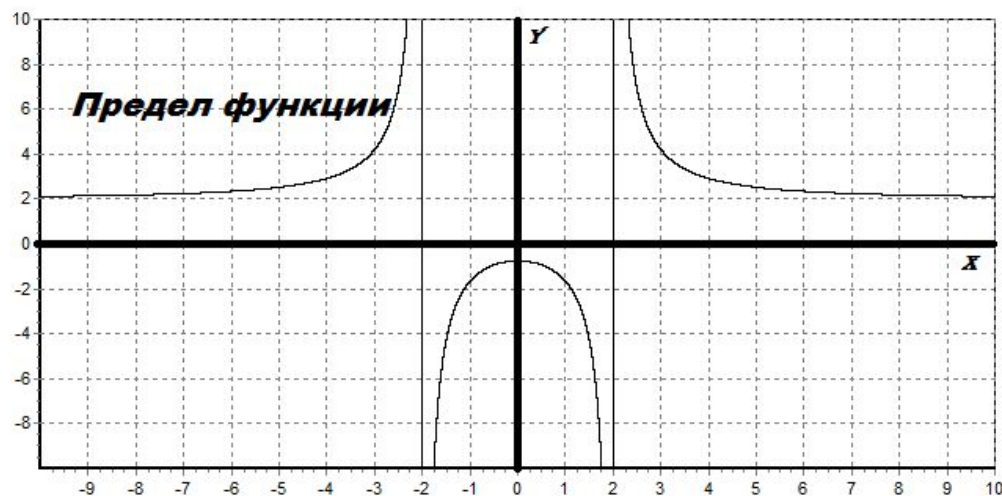


Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА
БЕСКОНЕЧНОСТИ.



Предел функции на бесконечности.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Что такое Бесконечность?

Предел функции на бесконечности

Предел функции на плюс бесконечности.

Предел функции на минус бесконечности.

Свойства.

Примеры.

Предел функции на бесконечности.

Предел функции на бесконечности

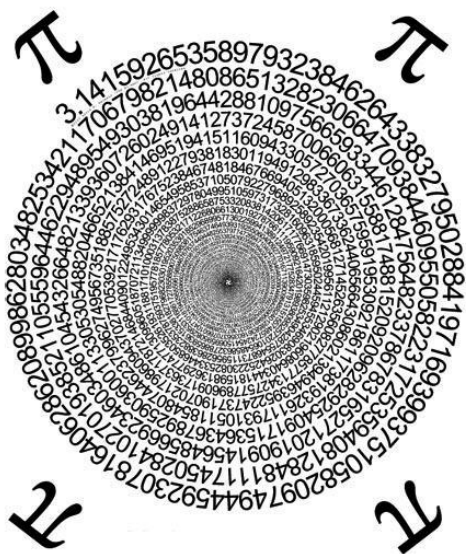
Ребята, давайте посмотрим, что такое предел функции на бесконечности?

А, что такое бесконечность?

Бесконечность — используется для характеристики безграничных, беспредельных, неисчерпаемых предметов и явлений, в нашем случае характеристика чисел.

Бесконечность — сколь угодно большое(малое), безграничное число.

Если рассмотреть координатную плоскость то ось абсцисс(ординат) уходит на бесконечность, если ее безгранично продолжать влево или вправо(вниз или вверх).



Предел функции на бесконечности.

Предел функции на плюс бесконечности.

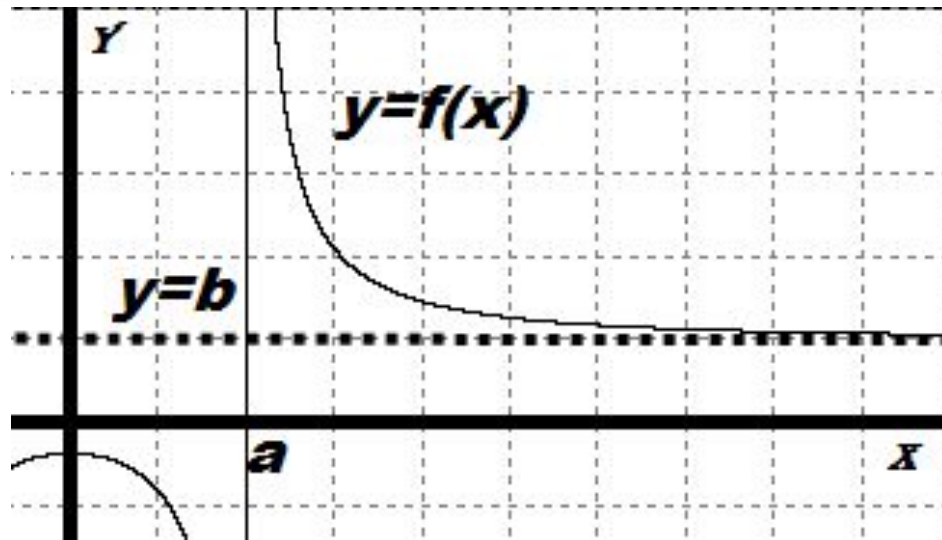
Теперь давайте перейдем к пределу функции на бесконечности:

Пусть у нас есть функция $y=f(x)$, область определения нашей функции содержит луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

предел функции $y=f(x)$ при x стремящимся к плюс бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

Предел функции на минус бесконечности.

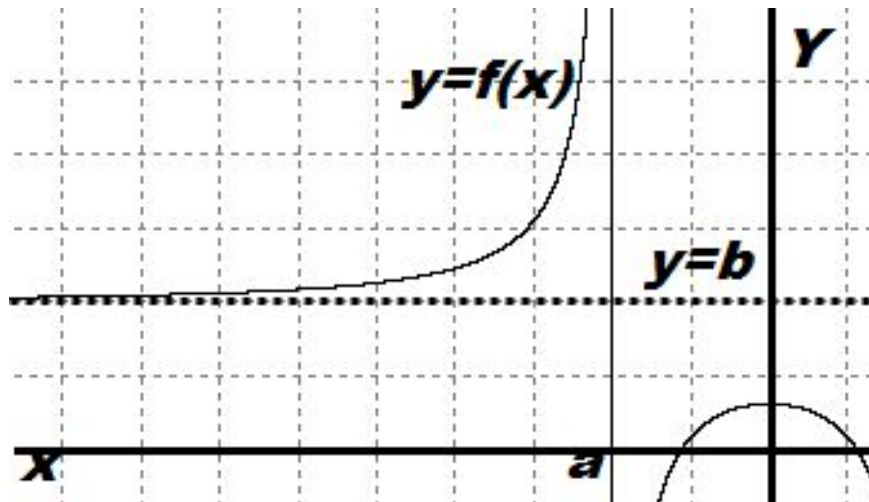
Посмотрим немного другой случай:

Пусть у нас есть функция $y=f(x)$, область определения нашей функции содержит луч $(-\infty; a]$, и пусть прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

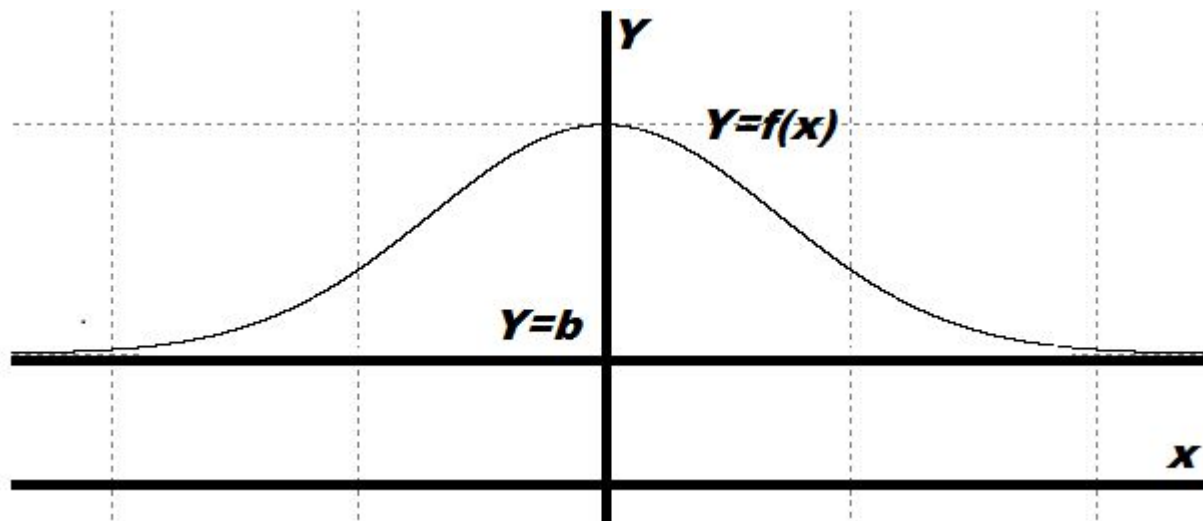
предел функции $y=f(x)$ при x стремящимся к минус бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

Предел функции на бесконечности.

Так же наши соотношения могут выполняться одновременно:



Тогда принято записывать как:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

предел функции $y=f(x)$ при x стремящимся к бесконечности равен b

Предел функции на бесконечности.

Пример.

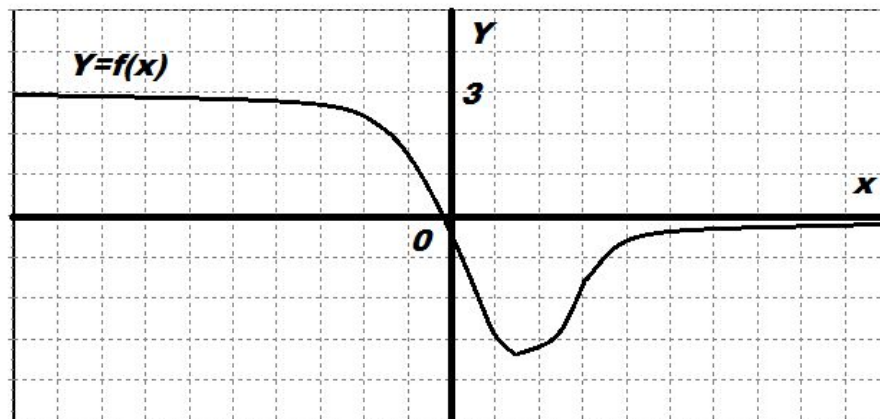
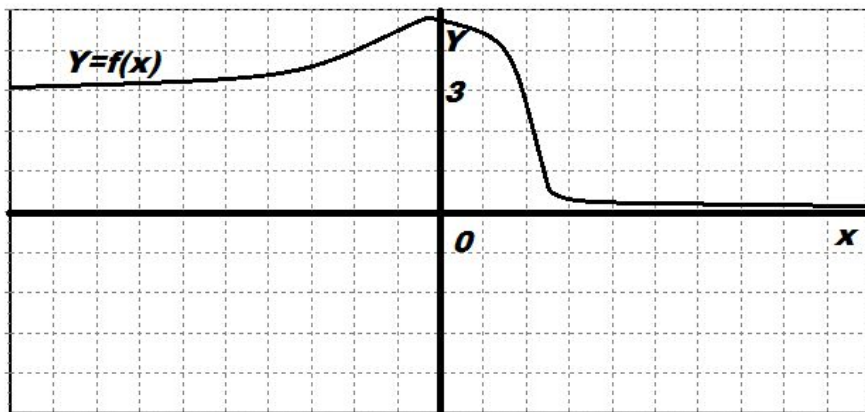
Пример. Построить график функции $y=f(x)$, такой что:

- 1) Область определения – множество действительных чисел.*
- 2) $f(x)$ - непрерывная функция*
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$*
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$*

Решение:

Нам надо построить непрерывную функцию на $(-\infty; +\infty)$.

Покажем пару примеров нашей функции.



Предел функции на бесконечности.

Основные свойства.

Для вычисления предела на бесконечности пользуются несколькими утверждениями:

1) Для любого натурально числа m справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^m} \right) = 0$$

2) Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$ то:

а) Предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = b + c$

б) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \times g(x)) = b \times c$$

в) Предел частного равен частному пределов: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{b}{c}, c \neq 0$

г) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{5x + 3}$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}}$$

Воспользуемся свойством предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{3}{x})}$$

Ребята, вспомните предел числовой последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

Получим:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 0)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + 0)} = \frac{2}{5}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{5x + 3} = \frac{2}{5}$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции $y=f(x)$, при x стремящимся к бесконечности.

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (10 + \frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: $5-0=5$; Предел знаменателя равен: $10+0=10$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции $y=f(x)$, при x стремящимся к бесконечности.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 10}{8x^3 + 5}$$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{8 + \frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (8 + \frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: 0; Предел знаменателя равен: 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{0}{8} = 0$$

Предел функции на бесконечности.

Задачи для самостоятельного решения.

- 1) Построить график непрерывной функции $y=f(x)$. Такой что предел при x стремящимся к плюс бесконечности равен 7, а при x стремящимся к минус бесконечности 3.
- 2) Построить график непрерывной функции $y=f(x)$. Такой что предел при x стремящимся к плюс бесконечности равен 5 и функция возрастает.
- 3) Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{8x+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{4x+10}$$

- 1) Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 2x^2 + 1}{12x^4 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9x + 1}{10x^4}$$