Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 15

Тема: Повторение опытов. Формула Бернулли.

Цель: Ознакомиться с формулой Бернулли и приближенными формулами в схеме Бернулли.

- Опыты называются *независимыми,* если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты
- Независимые опыты могут производиться, как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-либо события А во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Формула Бернулли

- *<u>Теорема:</u>*
- Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие A.
- Тогда вероятность $P_{k,n}$ того, что событие A производится в n опытах k раз выражается формулой:

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где *(q=1-p)*

Пример

- 1. Производится 4 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность 4 попаданий из 6 выстрелов.
- Решение

$$P_{6,4} = C_6^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot (1-0{,}6)^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 = 15 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 = 0{,}31104$$

Пример

2. Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10%, определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен.

Решение

Вероятность того, что случайно проверенный куст будет поврежден равна

$$p = \frac{10\%}{100\%} = 0.1,$$

$$q = 1 - 0.1 = 0.9,$$

Вероятность того, что из 10 кустов 1 будет поврежден вычислим
по формуле Бернулли

$$P_{1,10} = C_{10}^{1} \cdot 0.1^{1} \cdot (0.9)^{10-1} = 10 \cdot 0.1 \cdot (0.9)^{9} \approx 0,3874.$$

Пример

3. Бланк программированного опроса состоит из 5 вопросов. На каждом даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания ученику удастся выбрать

- 5 правильных;
- 2 правильных
- хотя бы 4 правильных

Решение

- $p = \dfrac{1}{3} \qquad q = \dfrac{2}{3}$

$$P_{5,5} = p^5 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

- $$P_{2,5} = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243}$$

- $$P_{4,5} + P_{5,5} = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{243} = \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243}$$

Наивероятнейшее число

- *Определение:* Наивероятнейшее число k_0 наступивших событий в схеме Бернулли определяется из неравенства:

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Пример

1. Ученик отвечает на тестовые задания. На каждый вопрос он отвечает верно с вероятностью 0,65. Найти наивероятнейшее число верных ответов, если в тесте 20 вопросов.

Решение: $p = 0{,}65, q = 1 - 0{,}65 = 0{,}35, n = 20$

$$20 \cdot 0{,}65 - 0{,}35 \le k_0 \le 20 \cdot 0{,}65 + 0{,}65$$

$$12{,}65 \le k_0 \le 13{,}65$$

$$k_0 = 13$$

Пример

2. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

- Решение: $np - q \le k_0 \le np + p$

$p = 1/6, q = 5/6,$

$$\frac{n-5}{6} \le 50 \le \frac{n+1}{6}$$

$$n - 5 \le 300 \le n + 1$$

$$299 \le n \le 305$$

ВГУЭС

- **Вопросы:**
- Укажите условия применения формулы Бернулли.
- Используется ли в формуле Бернулли вероятность противоположного события?