

***Тема: «Построение графика
неявно заданной функции на
примере лемнискаты Бернулли»***



***Проект
Гузь Ольги***

Содержание.

1. Определение функции заданной неявно.
 2. Определение лемнискаты.
 3. Вывод уравнения лемнискаты.
 4. Преобразование уравнения лемнискаты.
 5. Уравнение лемнискаты в полярной системе координат.
 6. Исследование уравнения лемнискаты.
 7. Построение лемнискаты.
 8. Применение лемнискаты.
 9. Краткая историческая справка.
-

Определение неявно заданной функции

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

В зависимости от того, какой является функция $F(x, y)$ -алгебраической или трансцендентной, кривые также делятся на алгебраические и трансцендентные.

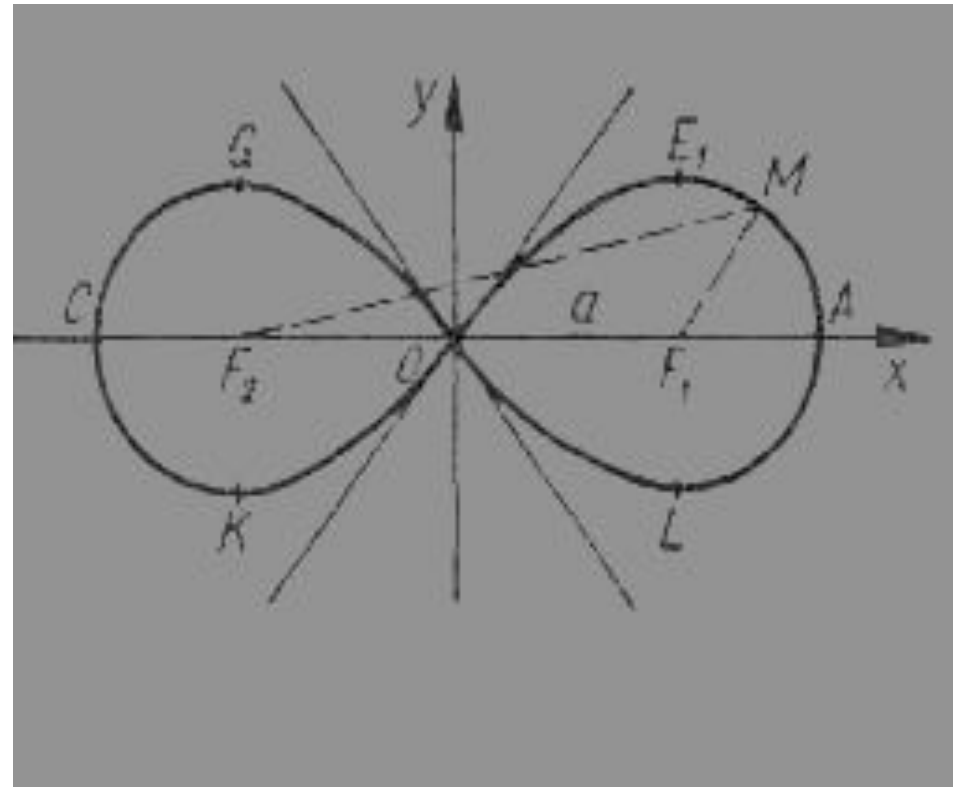
Примеры, лемниската Бернулли.

$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2 x^2 = a^4$$

Определение лемнискаты

Лемниската –

это кривая, у которой произведение расстояний каждой ее точки до двух заданных точек-фокусов - постоянно и равно квадрату половины расстояния между ними.



Вывод уравнения лемнискаты

Пусть фокусы имеют координаты: $F_1(-a;0)$ и $F_2(a;0)$; $M(x, y)$ - произвольная точка геометрического места, то по условию

$$F_1M \cdot F_2M = 2a$$

Подставляя в это равенство выражения

$$F_1M = \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2}; F_2M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

Преобразование уравнения лемнискаты

Дальнейшая цель- получить уравнение лемнискаты Бернулли в более простом виде.

Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$[(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax] \cdot [(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4$$

отсюда

$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

Преобразование уравнения лемнискаты

Преобразуя последнее уравнение, имеем:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$$

или в окончательном виде

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

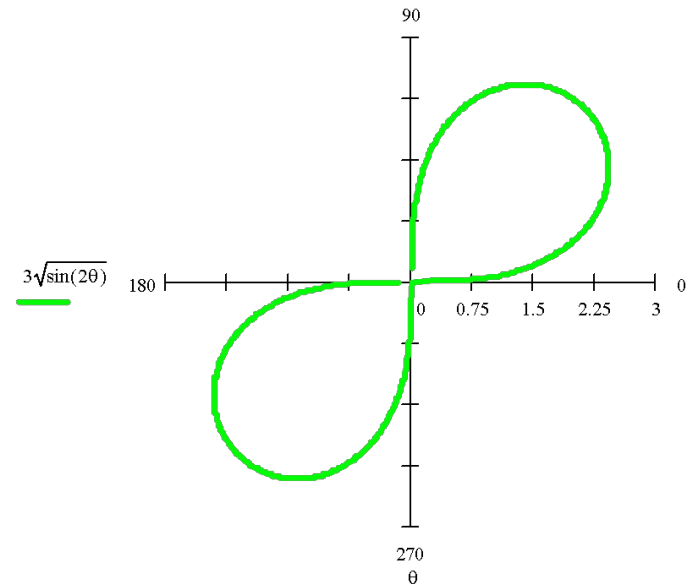
Мы получили уравнение лемнискаты в декартовой системе координат.

Построение графика лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Т.к **x** и **y** входят в это уравнение только в чётных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей.

Построить график данной функции затруднительно. Запишем это же уравнение в полярной системе координат.



Уравнение лемнискаты в полярной системе координат

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Поскольку $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$,
то уравнение лемнискаты в полярных
координатах примет вид

$$\rho^4 = 2a^2 \rho (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

или

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Исследование уравнения лемнискаты

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

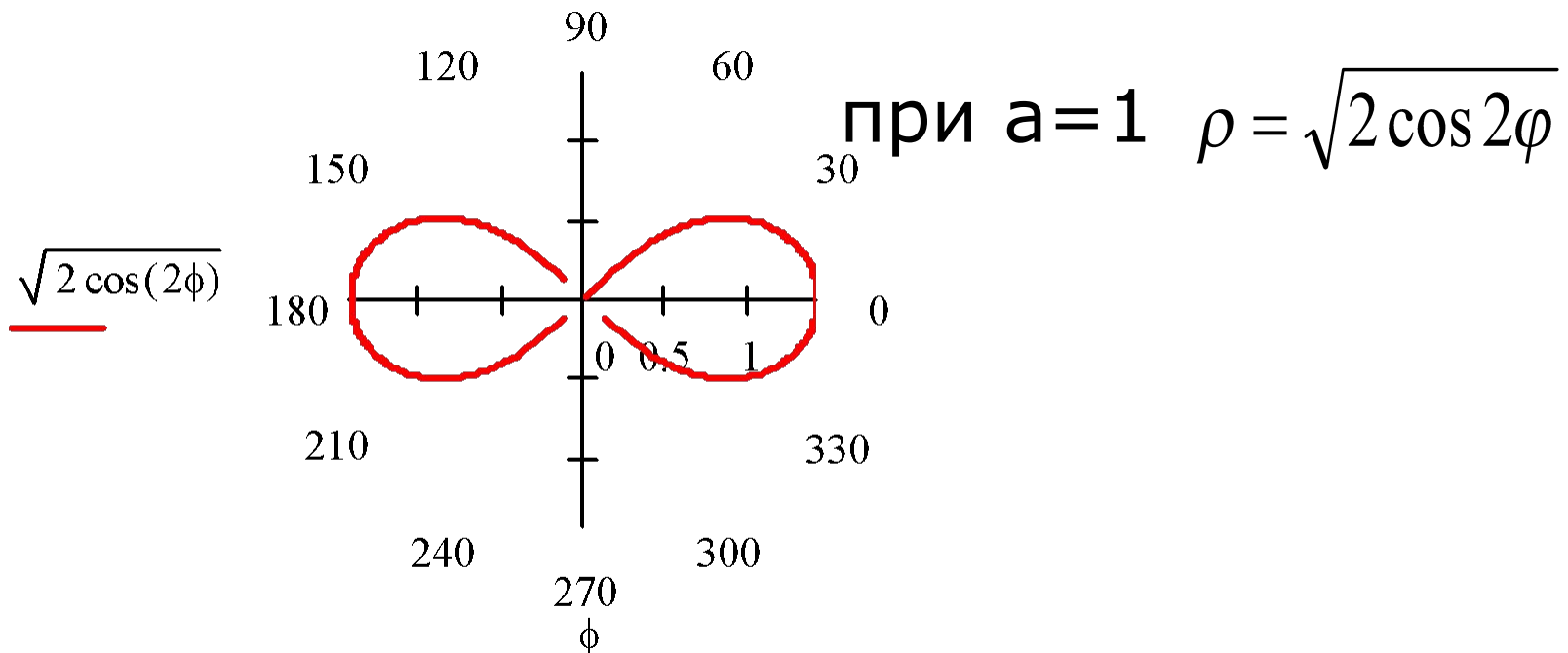
Из этого уравнения видно, что $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Если φ увеличивается в пределах

от 0 до $\frac{\pi}{4}$, то ρ уменьшается от $\rho = a\sqrt{2}$ до $\rho = 0$.

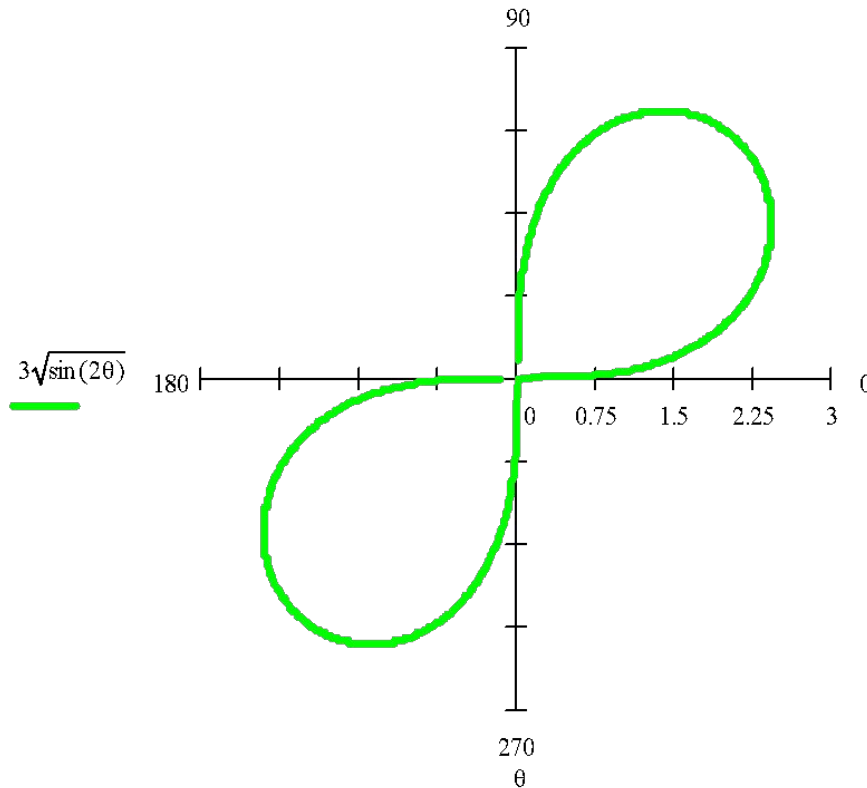
Если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то ρ принимает мнимые значения. Это означает, что на лемнискате нет точек, для которых φ меняется в указанных пределах.

Построение лемнискаты

Построим график функции $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ при разных значениях a :



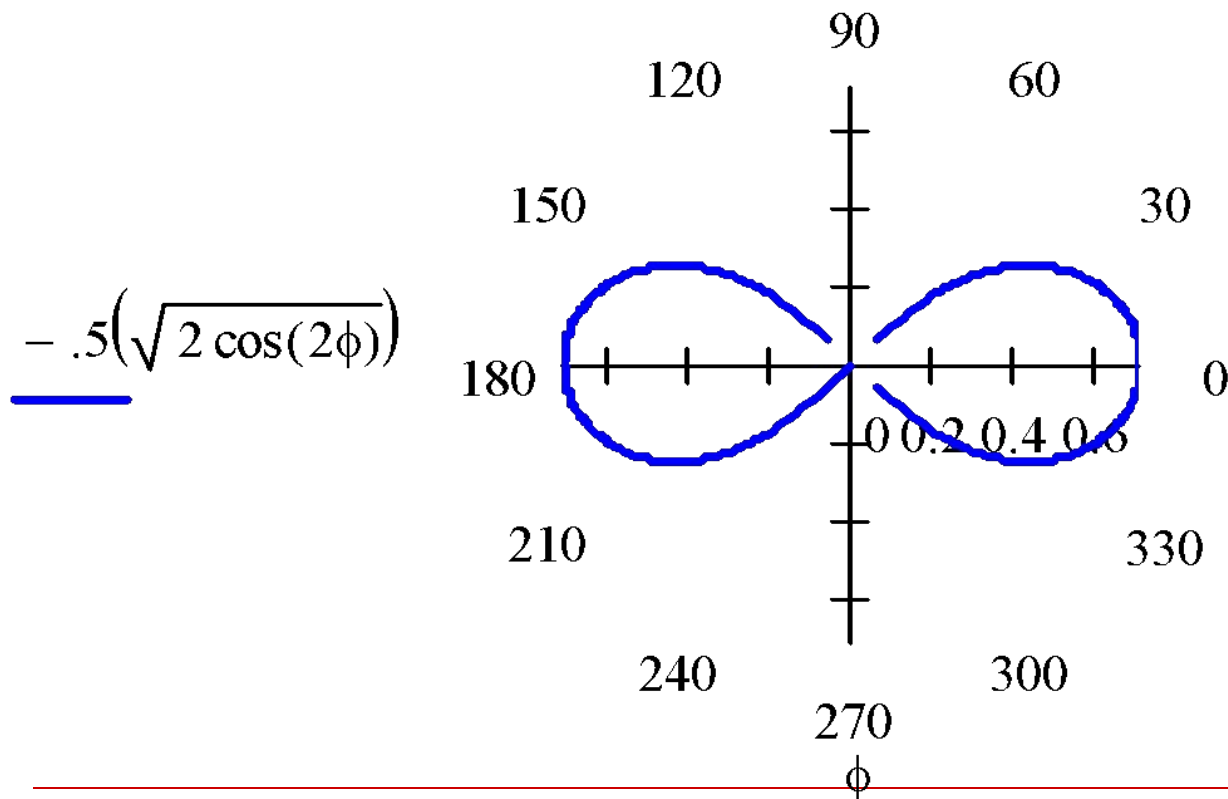
Построение лемнискаты



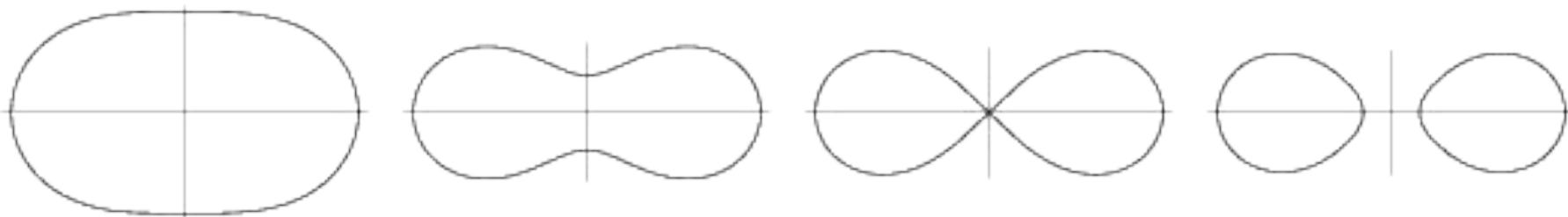
$$\rho = 3\sqrt{2}\sin 2\varphi$$

Построение лемнискаты

при $a = -0,5$ $\rho = -0,5\sqrt{2 \cos 2\varphi}$



При построении кривых семейства овалов Кассини, промежуточным графиком является лемниската Бернулли.



1.

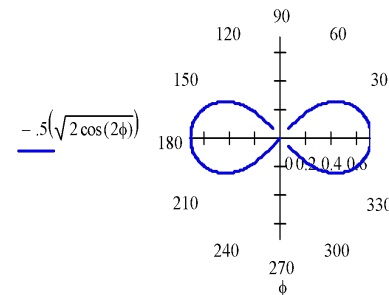
2.

3.

4.

- 1.** Фигура выпуклая как эллипс.
 - 2.** Появляется вогнутая перемычка с четырьмя точками перегиба.
 - 3.** Перемычка смыкается, полученная фигура называется лемнискатой Бернулли.
 - 4.** Фигура разваливается на два овала.
-

Применение:



В технике лемниската применяется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

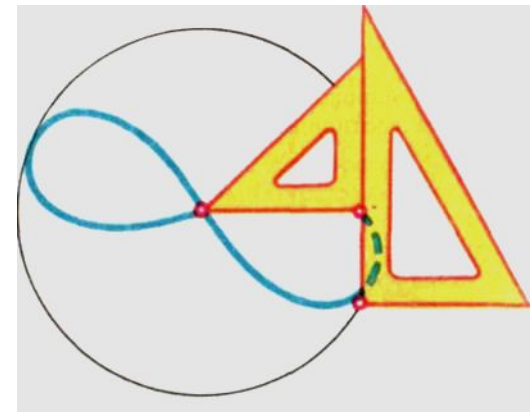
Способы построения лемнискаты

Существует два способа построения лемнискаты.

Первый способ - с помощью

двух угольников и нарисованной на листе бумаги окружности (рис.2). Вершина острого угла одного из угольников находится в центре окружности, вершина прямого угла другого - на окружности.

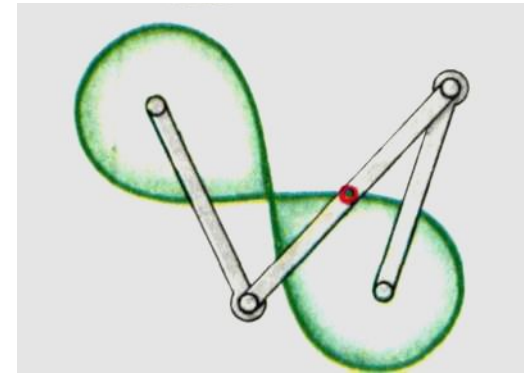
Рис.2



Способы построения лемнискат

Второй способ - с помощью шарнирного устройства, две точки которого закреплены на плоскости (рис.3).

Рис.3



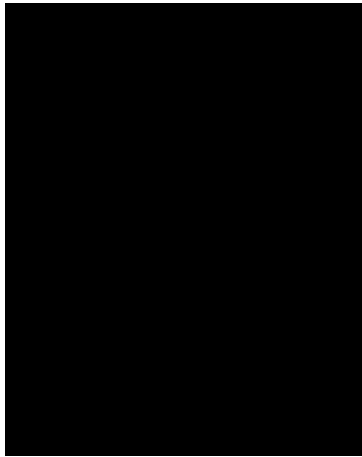
Историческая справка

Лемниската Бернулли.

Ее автор – швейцарский математик Якоб Бернулли. Он дал этой кривой поэтическое название «лемниската».

В античном Риме так называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх.

Краткая биография



БЕРНУЛЛИ Якоб I (1654-1705).

Швейцарский математик.

Работал в Базельском университете.

Работы посвящены математическому анализу, теории вероятностей и механике. В 1687 познакомился с первым мемуаром *Лейбница* по дифференциальному исчислению и применил его идеи к изучению ряда кривых, встречающихся в математике, механике, и выводу формулы радиуса кривизны плоской кривой. Ввел термин «интеграл».

Список использованной литературы

- ♣ **Вирченко Н.А. и др. Справочник «Графики функций»; Киев: Наук. думка, 1979г;**
 - ♣ **И.И.Валуцэ «Математика для техникумов»; Москва, Издательство «Наука», 1980г;**
 - ♣ **Маркушевич А.И. «Замечательные кривые»; Москва 1978 г.**
-

Список использованной литературы

Internet-ресурсы: WWW.Colledg.Ru;
WWW.5ballov.Ru; WWW.bankreferatov.Ru;
WWW.rubricon.com.

Программное обеспечение: MS Word;
MS Power Point; Windows Media; Nero
Wave Editor; Сканер.
